CALCOLO NUMERICO (19 febbraio 2018)

1) Sia data la funzione $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ avente le radici reali $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$.

1.1) Si determini per quali valori del dato iniziale dato dal comando Matlab `x0=-20:.5:20` il metodo di Newton approssima ciascuna delle radici $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, rispettivamente. Si consideri a tale scopo `toll=1e-6` e test di arresto basato sulla differenza tra iterate successive

1.2) Si consideri ora per la approssimazione delle radici il metodo delle secanti, la cui generica iterazione è data da

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot (x_i - x_{i-1}), \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

dove x_0 e x_1 sono valori dati. Si applichi tale metodo alla ricerca delle radici della funzione $f(x)$. Sia x_0 dato dal comando Matlab `x0=[-20:.5:20]` e si prenda come valore x_1 quello generato da una iterazione del metodo di Newton partendo dal medesimo dato iniziale. Si consideri nuovamente `toll=1e-6` e test di arresto basato sulla differenza tra iterate successive. Si determini anche in questo caso per quali valori del dato iniziale si approssima ciascuna delle radici $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, rispettivamente.

RISULTATI

Newton se-
canti

	α_1	α_2	α_3
x0			

	α_1	α_2	α_3
x0			

2) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di dimensione n, con A avente elementi diversi da zero sulla prima riga, sulla prima colonna e sulla diagonale principale:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/9 & ... & 1/n^2 \\ 1/2 & 2 & 0 & ... & 0 \\ 1/3 & 0 & 3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1/n & 0 & 0 & ... & n \end{bmatrix}, \quad b_i = (-1)^i, \ i = 1, ..., n,$$

lo si risolva utilizzando la fattorizzazione $PA = LU$, con $n = 10, \ 20, \ 40$.

Riportare le componenti $\widehat{x}_1$ e $\widehat{x}_n$ della soluzione $\widehat{\mathbf{x}}$ trovata utilizzando P, L e U.

Successivamente si risolva il sistema perturbato $A_\epsilon \mathbf{x}_\epsilon = \mathbf{b}_\epsilon$, dove

$$A_\epsilon = A + \begin{bmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon & ... & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & ... & \epsilon \end{bmatrix}, \ (\mathbf{b}_\epsilon)_i = b_i + \epsilon, \ i = 1, ..., n$$

utilizzando la fattorizzazione $P_\epsilon A_\epsilon = L_\epsilon U_\epsilon$ della matrice perturbata A_ϵ, con $\epsilon = 10^{-3}$ e $\epsilon = 10^{-6}$.

Calcolare le perturbazioni relative $\Delta_{\mathbf{x}} = \frac{\|\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_\epsilon\|_2}{\|\widehat{\mathbf{x}}\|_2}$, $\Delta_A = \frac{\|A - A_\epsilon\|_2}{\|A\|_2}$.

$\epsilon = 10^{-3}$	$\widehat{x}_1$	$\widehat{x}_n$	$\Delta_{\mathbf{x}}$	Δ_A
$n = 10$				
$n = 20$				
$n = 40$				

$\epsilon = 10^{-6}$	x_1	$\widehat{x}_n$	$\Delta_{\widehat{\mathbf{x}}}$	Δ_A
$n = 10$				
$n = 20$				
$n = 40$				

3) Approssimare l'integrale definito

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

con il metodo dei trapezi e il metodo di Cavalieri Simpson compositi, utilizzando $m = 2^n$ sottointervalli, $n \geq 1$. Siano I_m^T e I_m^C i rispettivi valori ottenuti. Determinare M definito come il minimo valore di m tale per cui si verifica

$$E_M = |I_M^T - I_M^C| < 10^{-4}.$$

Successivamente, determinare N definito come il minimo valore di m tale per cui si verifica

$$E_N = |I_N^T - I| < 10^{-4}.$$

RISULTATI

$M =$ $E_M =$ $N =$ $E_N =$