1) Data la funzione $g(x) = \frac{4x+3}{3x+4}$

1.1) trovare i suoi punti fissi;

1.2) studiare la convergenza e l'ordine del metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$, al variare di $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-4/3\}$

1.3) determinare una condizione sufficiente su x_0 affinchè il metodo iterativo risulti convergente.

Milano 21-2-19

$g(x) = \frac{4x+3}{3x+4}$ $\quad x \neq -\frac{4}{3}$

$\frac{4x+3}{3x+4} = x$ $\quad \cancel{4x} + 3 = 3x^2 + \cancel{4x}$ $\quad x = \pm 1$

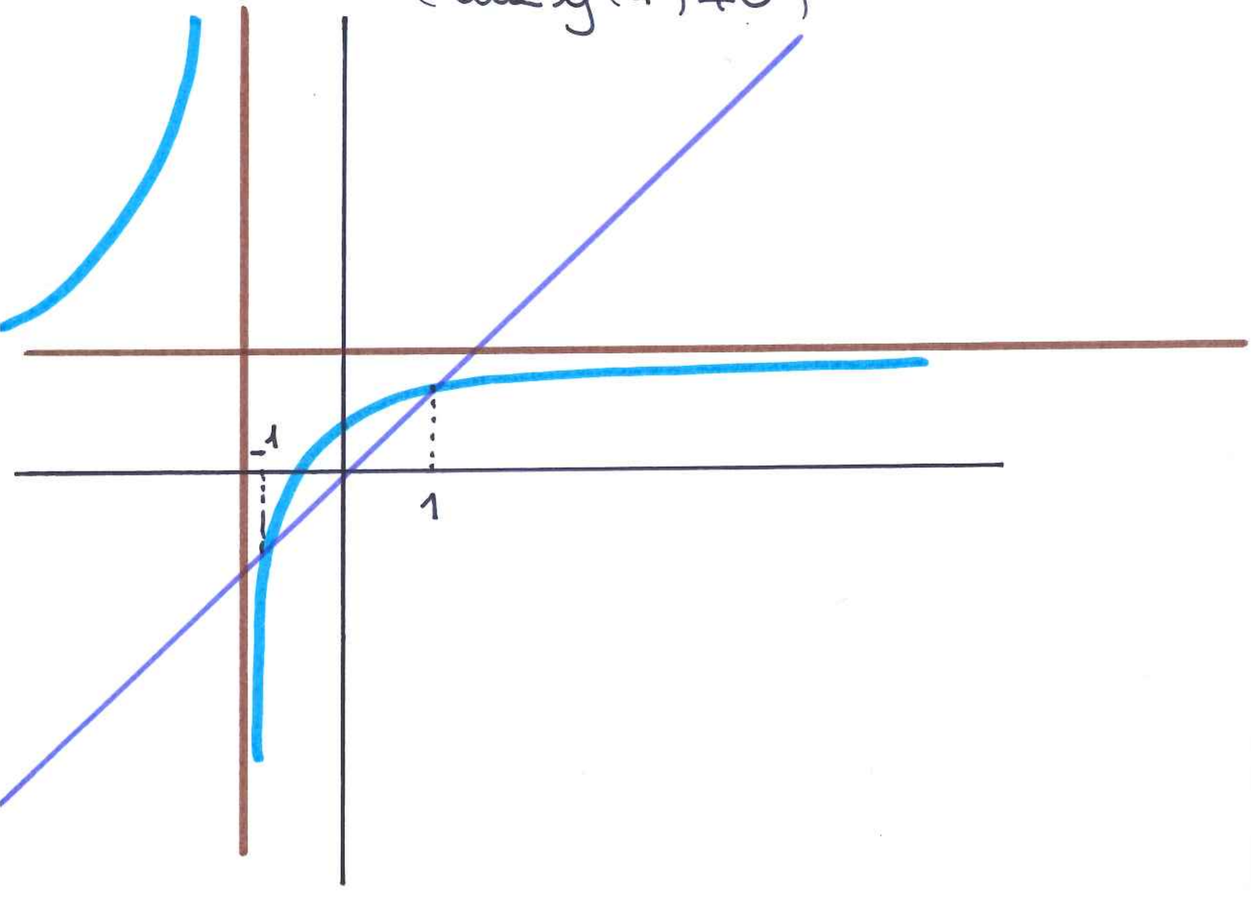
$g(0) = \frac{3}{4}$ $\quad g(x) > 0$ $\quad x < -\frac{4}{3} \cup x > -\frac{3}{4}$

ASINTOTI $\quad y = \frac{4}{3}$ $\quad x = -\frac{4}{3}$

$g'(x) = \frac{4(3x+4) - 3(4x+3)}{(3x+4)^2} = \frac{7}{(3x+4)^2} > 0$ $\quad x \neq -\frac{4}{3}$ (disc. 2^a specie)

$g'(-1) = 7$ DIVERGENZA LOCALE

$g'(1) = \frac{1}{7} < 1$ CONVERGENZA LOCALE (ordine 1) (ma $g'(1) \neq 0$)



$x_0 < -1$ $\quad \exists N$ t.c. $\quad x_N < -\frac{4}{3}, \quad x_{N+1} > \frac{4}{3}, 1 < x_{N+2} < \frac{4}{3}$

$x_0 = -1 \qquad x_k = -1 \quad \forall k$

$-1 < x_0 < 1$ $\quad$ successione monotona crescente l. sup. da 1

$x_k \nearrow 1$

$x_0 = 1 \qquad x_k = 1 \quad \forall k$

$x_0 > 1$ $\quad$ succ. monot. decr. lim. inf. da 1

$x_k \searrow 1$

Condizione sufficiente

$$g'(x) = \frac{7}{(3x+4)^2} < 1 \qquad 7 < 9x^2 + 24x + 16$$

$$9x^2 + 24x + 9 > 0$$

$$3x^2 + 8x + 3 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-9}}{3} = \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{3} \begin{cases} \frac{-4-\sqrt{7}}{3} < -\frac{4}{3} \\ \frac{-4+\sqrt{7}}{3} > -\frac{4}{3} \end{cases}$$

C.S. $\quad x_0 > \frac{-4+\sqrt{7}}{3} \quad \left(\in I(1) \right)$

CNS $\quad x_0 > -1$

$$\left(\frac{-4+\sqrt{7}}{3} > -1 \qquad -4+\sqrt{7} > -3 \qquad \sqrt{7} > 1 \right)$$

Si osservi questo caso particolare:

$$g(x) = -\frac{4}{3}$$

$$\frac{4x+3}{3x+4} = -\frac{4}{3} \qquad 12x + 9 = -12x - 16$$

$$x = -\frac{25}{24}$$

$\Rightarrow$ se $\exists\, x_k$ tale che $g(x_k) = -\frac{4}{3}$ il procedimento iterativo si arresta poichè non è possibile calcolare $g(x_{k+1}) = g\left(-\frac{4}{3}\right)$

2) Date le coppie di punti $(1,1)$, $(2,2)$, $(0,k)$, $(3,2k)$,

2.1) determinare il valore di k in modo che il polinomio $p(x)$ che interpola i dati abbia grado 2;

2.2) per il valore di k trovato al punto 2.1), verificare che $p(x)$ interpola la funzione

$$f(x) = x + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{2}x + \frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{2}x$$

nei nodi $x_0=0,\ x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3.$

2.3) fornire una maggiorazione dell'errore:

$$\max_{0\le x\le 3}|f(x)-p(x)|.$$

Milano 21-2-2019

$(1,1),(2,2),(0,k),(3,2k)$

$$\begin{array}{ll|l|l|l}
1 & 1 & & & \\
 & & 1 & & \\
2 & 2 & & \dfrac{\frac{k-2}{-2}-1}{-1} = \dfrac{k-2+2}{2} = \dfrac{k}{2} & \\
 & & \dfrac{k-2}{-2} & & \dfrac{\frac{5k-6}{6}-\frac{k}{2}}{2} = \dfrac{5k-6-3k}{6}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{2k-6}{12} = \dfrac{k-3}{6} \\
0 & k & & \dfrac{k}{3}+\dfrac{k-2}{2} = \dfrac{2k+3k-6}{6} = \dfrac{5k-6}{6} & \\
 & & \dfrac{k}{3} & & \\
3 & 2k & & &
\end{array}$$

$$p(x) = 1 + (x-1) + \frac{k}{2}(x-1)(x-2) + \frac{k-3}{6}(x-1)(x-2)x$$

Affinché $p(x)$ abbia grado 2 deve essere $k-3=0$ cioè $k=3$

$$p(x) = 1 + x - 1 + \frac{3}{2}(x^2-3x+2) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 3$$

$p(0) = 3$ $\qquad$ $f(0) = \frac{3}{2}+\frac{3}{2} = 3$

$p(1) = \frac{3}{2}-\frac{7}{2}+3 = 1$ $\qquad$ $f(1) = 1+\frac{3}{2}-\frac{3}{2} = 1$

$p(2) = 6-7+3 = 2$ $\qquad$ $f(2) = 2+\frac{3}{2}-\frac{3}{2} = 2$

$p(3) = \frac{27}{2}-\frac{21}{2}+3 = 6$ $\qquad$ $f(3) = 3+\frac{3}{2}+\frac{3}{2} = 6$

$$f(x)-p(x) = \frac{\overbrace{x(x-1)(x-2)(x-3)}^{\omega(x)}}{4!} f^{(4)}(t) \qquad t \in (0,3)$$

$$x \in (0,3)$$

$$|f(x)-p(x)| \leq \frac{1}{4} \max_{0 \leq x \leq 3} |\omega(x)| \max_{0 \leq t \leq 3} |f^{(4)}(t)|$$

1° modo

$$|\omega(x)| \leq |x||x-1||x-2||x-3| \leq 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 36$$

2° modo

$$\omega(x) = (x^2-x)(x^2-5x+6) = x^4 - x^3 - 5x^3 + 5x^2 + 6x^2 - 6x =$$

$$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

$$\omega'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 22x - 6 = 2(2x^3 - 9x^2 + 11x - 3)$$

(per simmetria: $\omega'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$)

	2	−9	11	−3
$\frac{3}{2}$		3	−9	3
	2	−6	2	//

$$\left(x - \frac{3}{2}\right) 2(x^2 - 3x + 1) = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

zeri di ω': $\frac{3}{2}$; $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$$\omega\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)\left(\frac{3}{2}-3\right) =$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{16}$$

$$\omega\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}-2\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}-3\right) =$$

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$\left(\frac{5}{4}-\frac{9}{4}\right)\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right) = -1$$

$$\omega\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \cdots = \left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$= -1$ (simmetria rispetto $x = \frac{3}{2}$)

$$\max |\omega(x)| = 1$$

$$f'(t) = 1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t - \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}t$$

$$f''(t) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\frac{\pi}{2}t - \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\frac{\pi}{2}t$$

$$f'''(t) = \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\cos\frac{\pi}{2}t + \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\sin\frac{\pi}{2}t$$

$$f^{(4)}(t) = -\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\sin\frac{\pi}{2}t + \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\cos\frac{\pi}{2}t =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\left[-\sin\frac{\pi}{2}t + \cos\frac{\pi}{2}t\right] = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left|f^{(4)}(t)\right| = \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\max_{0 \le t \le 3} \left|f^{(4)}(t)\right| = \frac{3}{2}\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4$$

$$\max_{0 \le x \le 3} |f(x) - p(x)| \le \frac{1}{4!} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2}\,\frac{\pi^4}{2^4} =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}\,\pi^4}{2^5 \cdot 4!}$$

(oppure, nel 1° modo

$\le \frac{1}{4!} \cdot 36 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4$)

* Si può anche maggiorare in modo meno rigoroso, senza il calcolo esatto del $\max |f^{(4)}(t)|$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \left|-\sin\frac{\pi}{2}t + \cos\frac{\pi}{2}t\right| \le$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \left(\left|\sin\frac{\pi}{2}t\right| + \left|\cos\frac{\pi}{2}t\right|\right) = \frac{3}{\cancel{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \cdot \cancel{2}$$

$$3\left(\frac{\pi}{2}\right)^4$$

3) Data la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ \beta & 1 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix},$$

per i valori di β per i quali A è non singolare:

3.1) calcolare la matrice A^{-1} .

3.2) per i valori di β per i quali A è anche diagonalmente dominante, calcolare $\|A\|_\infty$, $\|A^{-1}\|_\infty$ e trovare per quali β si ha $K_\infty(A) = 1$.

Milano 21-2-2019

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ \beta & 1 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix}$$

$\det A = 1-\beta^2 - \beta\cdot\beta = 1-2\beta^2 \neq 0 \qquad \beta \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

3.1)

$$A^{-1} = \frac{1}{1-2\beta^2}\begin{bmatrix} 1-\beta^2 & -\beta & \beta^2 \\ -\beta & 1 & -\beta \\ \beta^2 & -\beta & 1-\beta^2 \end{bmatrix}$$

$\|A\|_\infty = \max\{1+|\beta| ; 1+2|\beta|\} = 1+2|\beta|$

$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{|1-2\beta^2|} \max\{|1-\beta^2|+|\beta|+\beta^2 ; 1+2|\beta|\}$

A diagonalmente dominante:

$\begin{cases} 1 > |\beta| \\ 1 > 2|\beta| \end{cases} \qquad |\beta| < \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad |1-\beta^2| = 1-\beta^2$

$\Rightarrow \quad \|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{|1-2\beta^2|} \max\{1-\cancel{\beta^2}+|\beta|+\cancel{\beta^2} ; 1+2|\beta|\} = \frac{1+2|\beta|}{|1-2\beta^2|}$

$$K_\infty(A) = \frac{(1+2|\beta|)^2}{|1-2\beta^2|} = 1$$

$$(1+2|\beta|)^2 = |1-2\beta^2|$$

Ma se $|\beta| < \frac{1}{2}$ allora $|1-2\beta^2| = 1-2\beta^2$

essendo $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$1+4|\beta|+4\beta^2 = 1-2\beta^2$$

$$6\beta^2+4|\beta|=0$$

L'unica soluzione è $\beta=0$ (se entrambi gli addendi sono >0)

4) Si consideri la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)|x|\,dx \approx \alpha f(-x_0) + \alpha f(x_0), \ \alpha > 0, 0 < x_0 \leq 1.$$

Determinare α e x_0 in modo tale che la formula di quadratura abbia grado di precisione massimo. Quale è il grado di precisione della formula ottenuta?

n° 4
Milano Mate 21-2-19

$f=1$ G.P. ≥ 0 $\int_{-1}^{1} |x|\,dx = 1$ $\quad \alpha+\alpha=1 \quad \alpha=\frac{1}{2}$

$f=x$ G.P. ≥ 1 $\int_{-1}^{1} |x| \cdot x\,dx = 0$ $\quad -\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{2}x_0=0 \quad \forall x_0$

$\alpha=\frac{1}{2}$

$f=x^2$ G.P. ≥ 2 $\int_{-1}^{1} |x| x^2\,dx = 2\int_{0}^{1} x^3\,dx = 2\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\cdot(-x_0)^2 + \frac{1}{2}(x_0)^2 = \frac{1}{2} \quad x_0^2 = \frac{1}{2} \quad x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ (>0)$

Controllo G.P.

$f=x^3$ GP ≥ 3 $\int_{-1}^{1} |x| x^3\,dx = 0$

$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 0$

$f=x^4$ G.P. ≥ 4 $\int_{-1}^{1} |x| x^4\,dx = 2\int_{0}^{1} x^5\,dx = 2\left.\frac{x^6}{6}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{3} \neq \frac{1}{4}$ G.P. $= 3$

5) Sia $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ una matrice non singolare, stabilire se sono vere (si fornisca una dimostrazione) o false (si dia un controesempio) le seguenti affermazioni:

5.1) $|det(A)| \leq 10^{-N} \Rightarrow \mathcal{K}_\infty(A) \geq 10^N$

5.2) $\mathcal{K}_\infty(A) \geq 1$

5.3) Se A è simmetrica con $a_{ii} = N$, $i = 1, 2, \ldots, N$ allora A è definita positiva.

Milano 21-2-19

5.1) Per esempio: $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}10^{-N} & 0 \\ 0 & 10^{-2N} \end{bmatrix}$ $\det A = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3N} < 10^{-N}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^{N} & 0 \\ 0 & 10^{2N} \end{bmatrix}$$

$\|A\|_\infty = \frac{1}{2} \cdot 10^{-N}$ $\|A^{-1}\| = 10^{2N}$ $K_\infty(A) = \frac{1}{2} 10^{N} < 10^N$

5.2) $\|I_N\|_2 = 1$ $1 = \|I_N\|_2 = \|A \cdot A^{-1}\|_2 \leq \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = K_2(A)$

[per ogni norma naturale, per ogni matrice non singolare si ha $K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1$

5.3) Per esempio: Sia $N = 2$, $A = \begin{bmatrix} N & 2N \\ 2N & N \end{bmatrix}$

per esempio, criterio di Sylvester:

$\det A_{11} = N > 0$

$\det A_{22} = \det A = N^2 - 4N^2 < 0$

5.1) F

5.2) V

5.3) F