

CALCOLO NUMERICO (21 febbraio 2019)

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

- 1) Data la funzione $g(x) = \frac{4x+3}{3x+4}$
- 1.1) trovare i suoi punti fissi;
 - 1.2) studiare la convergenza e l'ordine del metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$, al variare di $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-4/3\}$;
 - 1.3) determinare una condizione sufficiente su x_0 affinché il metodo iterativo risulti convergente.

- 2) Date le coppie di punti $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(0, k)$, $(3, 2k)$,
- 2.1) determinare il valore di k in modo che il polinomio $p(x)$ che interpola i dati abbia grado 2;
 - 2.2) per il valore di k trovato al punto 2.1), verificare che $p(x)$ interpola la funzione

$$f(x) = x + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \sin \frac{\pi}{2}x + \frac{3}{2} \cos \frac{\pi}{2}x$$

nei nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$;

- 2.3) fornire una maggiorazione dell'errore:

$$\max_{0 \leq x \leq 3} |f(x) - p(x)|.$$

- 3) Data la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ \beta & 1 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix},$$

per i valori di β per i quali A è non singolare:

- 3.1) calcolare la matrice A^{-1} .
- 3.2) per i valori di β per i quali A è anche diagonalmente dominante, calcolare $\|A\|_\infty$, $\|A^{-1}\|_\infty$ e trovare per quali β si ha $K_\infty(A) = 1$.

- 4) Si consideri la formula di quadratura

$$\int_{-1}^1 f(x)|x| dx \approx \alpha f(-x_0) + \alpha f(x_0), \quad \alpha > 0, 0 < x_0 \leq 1.$$

Determinare α e x_0 in modo tale che la formula di quadratura abbia grado di precisione massimo. Quale è il grado di precisione della formula ottenuta?

- 5) Sia $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ una matrice non singolare, stabilire se sono vere (si fornisca una dimostrazione) o false (si dia un controesempio) le seguenti affermazioni:

5.1) $|\det(A)| \leq 10^{-N} \Rightarrow \mathcal{K}_\infty(A) \geq 10^N$

5.2) $\mathcal{K}_2(A) \geq 1$

- 5.3) Se A è simmetrica con $a_{ii} = N$, $i = 1, 2, \dots, N$ allora A è definita positiva.