Cognome: ______________ Nome: ______________ Matricola: __________

CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 20 febbraio 2019

1) Sia data la funzione $f(x) = x - \mathrm{e}^{-x}$ e sia $x = h(x)$ il problema di punto fisso associato con $h(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
Sia α l'unico zero di f e unico punto fisso di h.
Per l'approssimazione di α si consideri il metodo iterativo

$$x_{n+1} = g(x_n),\ n \geq 0,\ x_0 = 1,\ g(x) \equiv h(x) - \frac{h'(x)f(x)}{1 - h'(x)}.$$

(Si osservi che $g(\alpha) = \alpha$).
Determinare il numero di iterazioni N necessarie affinchè sia soddisfatto il test d'arresto $|f(x_N)| \leq 10^{-8}$ e riportare il valore di $f(x_N)$ calcolato.
Successivamente trovare un valore approssimato di $g'(\alpha)$ mediante la formula

$$g'(\alpha) \approx \frac{g(x_N) - g(x_{N-1})}{x_N - x_{N-1}}.$$

RISULTATI
$n =$ $f(x_N) =$ $g'(\alpha) \approx$

COMMENTO: Che cosa si può dedurre riguardo all'ordine del metodo iterativo?

2) Sapendo che i polinomi di Legendre si possono generare mediante la formula ricorsiva

$$P_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1} x P_k(x) - \frac{k}{k+1} P_{k-1}(x),\quad k \geq 0,\ P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,$$

e sapendo inoltre che

$$I_n = \int_{-1}^{1} P_n^2(x) \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1},\ n = 0, 1, 2, ...$$

si approssimino i valori di I_2 e I_3 con il metodo dei trapezi compositi utilizzando $m = 200$ sottointervalli di uguale ampiezza. Siano $\tilde{I}_2$ e $\tilde{I}_3$ i rispettivi valori trovati.
Riportare i valori di $\tilde{I}_2$ e $\tilde{I}_3$ e calcolare gli errori assoluti commessi: $e_2 = |I_2 - \tilde{I}_2|$ e $e_3 = |I_3 - \tilde{I}_3|$.

RISULTATI
$\tilde{I}_2 =$ $e_2 =$
$\tilde{I}_3 =$ $e_3 =$

3) Sia n un intero pari e sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice con il valore $1/3$ sulla diagonale principale, -1 sulla prima sotto- e sovra-diagonale e $1/2$ in posizione $(i, n+1-i)$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ eccetto che per $i = n/2$ e $n/2+1$. Ad esempio, per $n = 10$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

1. Per $n = 10, 100, 1000$ si stabilisca quale è la percentuale $p(A)$ di valori diversi da zero della corrispondente matrice A. Si calcolino poi i fattori L e U della matrice A utilizzando il comando `[L,U,P]=lu(A)`. Quale è la percentuale di valori diversi da zero delle matrici L e U?
2. Si risolva ora con i fattori L, U di cui al punto precedente il sistema $Ax = b$, con termine noto tale che la soluzione esatta sia data dal vettore $x_{ex} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tutto costituito da valori 1. Quanto vale la norma infinito dell'errore tra la soluzione esatta e quella così calcolata?

	$p(A)$	$p(L)$	$p(U)$	$\|\|x - x_{ex}\|\|_\infty$
$n = 10$				
$n = 100$				
$n = 1000$				