CALCOLO NUMERICO - (23 gennaio 2006)

1) Sia dato il problema di calcolare lo zero della funzione

$$f(x) = e^{x^2} - e^2$$

nell'intervallo [1,2]. Si dimostri che il metodo di Newton converge per ogni scelta del valore iniziale $x_0 \in [1, 2]$.
Inoltre, preso $x_0 = 1$, si calcoli l'errore commesso alla seconda iterata del Metodo di Newton

$$| x_2 - \alpha| \; ,$$

dove $\alpha = \sqrt{2}$ e' lo zero cercato.

2) Sia f una funzione continua sull'intervallo $[-h, h]$. Costruire il polinomio interpolante di grado 2 nei nodi $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = h$, e calcolare il valore del polinomio interpolante nel nodo $\overline{x} = \frac{h}{2}$ in funzione dei valori $f(x_0)$, $f(x_1)$ e $f(x_2)$.

3) Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 6+a & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad a \in R, \; a \geq 0 \; ,$$

dare una maggiorazione del numero di condizionamento $K_2(A)$ al variare del parametro positivo a.

4) Discutere la convergenza del metodo iterativo di Gauss-Seidel per la risoluzione di un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

5) Determinare il grado di precisione della formula di quadratura

$$\int_0^1 f(x) \; \mathrm{d}x \approx \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{6}f'(0)$$

e applicare la formula al calcolo dell'integrale definito

$$\int_0^1 \sin(\pi x) \; \mathrm{d}x.$$

Calcolare l'errore commesso.