CALCOLO NUMERICO (24 gennaio 2008)

1) Si consideri l'integrale

$$I(f) = \int_0^2 (x^3 + x^2 + x + 1)\ \mathrm{d}x$$

e si valuti il numero minimo di intervalli necessari per approssimare $I(f)$ con un errore assoluto $\leq 10^{-6}$, utilizzando la formula dei trapezi composita e la stima asintotica dell'errore. Successivamente si approssimi $I(f)$ con il metodo dei trapezi compositi utilizzando 2 sottointervalli e si calcoli l'errore commesso.

2) Studiare convergenza e ordine dei metodi iterativi

$$(*) \quad x_{k+1} = 2\ln x_k + 1, \qquad (**) \quad x_{k+1} = \exp\left(\frac{x_k - 1}{2}\right), \qquad k \geq 0,\ x_0 \in \mathbb{R},$$

per la soluzione dell'equazione non lineare $f(x) = 2\ln x - x + 1 = 0$.

3) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$$

3.1) determinare per quali valori di α e β è possibile calcolare la fattorizzazione $A = LU$ utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss senza pivot.

3.2) calcolare L e U al variare di α e β e il valore di $\det(A)$ sfruttando la fattorizzazione trovata. Per quali valori di α e β la matrice A è non singolare?

3.3) fornire una condizione necessaria e sufficiente su α e β affinchè i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergano alla soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$.