

CALCOLO NUMERICO (28 gennaio 2009)

- 1) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ con $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$ e

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\alpha & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

- (1.1) Determinare per quali valori di α la matrice A è invertibile.
(1.2) Costruire la matrice di iterazione B_J del metodo di Jacobi.
(1.3) Determinare per quali valori di α si verifica che $\|B_J\|_\infty < 1$.
- 2) Data l'equazione non lineare $2 - x^2 - \ln x = 0$, dimostrare che nell'intervallo $[1, 2]$ esiste un'unica radice α e che il metodo di Newton converge a tale radice $\forall x_0 \in [1, 2]$.
Applicare il metodo di Newton per calcolare x_2 a partire da $x_0 = 1$.

- 3) Sia data la formula di quadratura

$$\int_{-2}^2 f(x) dx \simeq \alpha_1 f(-\sqrt{2}) + \alpha_2 f(0) + \alpha_3 f(\sqrt{2}),$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ parametri reali. Si calcolino i valori dei tre parametri per i quali la formula ha grado di precisione massimo e si indichi quanto vale tale grado di precisione. Si applichi infine la formula trovata per approssimare il valore dell'integrale definito

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2 + 1} dx,$$

e si calcoli l'errore commesso.