

CALCOLO NUMERICO (18 gennaio 2010)

- 1) Costruire una Matlab function che, dati una funzione f , due numeri reali a e b , con $a < b$, un intero positivo n ed un numero reale x , compie le seguenti operazioni.
 - 1.1) Interpola la funzione f con un polinomio p_E di grado $n - 1$, in n nodi equispaziati sull'intervallo $[a, b]$.
 - 1.2) Calcola il valore $z = p_E(x)$.

- 2) Data la funzione

$$f(x) = e^x - x - 2,$$

dimostrare che esiste un unico zero $\alpha \in [-1, 2]$ e stimare il numero di iterazioni del metodo di bisezione necessarie per approssimare α con un errore assoluto inferiore a 10^{-2} .

- 3) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

- 3.1) determinare per quali valori di a la matrice è definita positiva;
 - 3.2) determinare per quali valori di a la matrice è diagonalmente dominante;
 - 3.3) calcolare la fattorizzazione $A = LU$ e rappresentare graficamente la quantità $\|U\|_\infty$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.
- 4) Stimare il numero minimo di intervalli necessari per calcolare l'integrale definito

$$I \equiv \int_0^2 \ln(x+1) \, dx$$

con un errore assoluto $\leq 10^{-4}$, utilizzando la formula dei trapezi composta e la stima asintotica dell'errore.

- 5) Assegnati i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ e la funzione $f(x) = \cos \frac{\pi}{3}x$,
 - 5.1) determinare il polinomio $p_1(x)$ di grado 1, che interpola la funzione f nei nodi x_0 e x_1 e successivamente il polinomio $p_2(x)$ di grado 2, che interpola la funzione f nei nodi x_0 , x_1 e x_2 ;
 - 5.2) stimare gli errori di interpolazione

$$\max_{x \in [0,3]} |f(x) - p_1(x)|, \quad \max_{x \in [0,3]} |f(x) - p_2(x)|.$$