CALCOLO NUMERICO 1 (26 gennaio 2012) - Seconda prova in itinere

1) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con A matrice $(n+1) \times (n+1)$ di elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ \alpha^{(j-1)}, & \text{se } i = 1 \wedge j = 2, ..., n+1 \\ \alpha^{(i-1)}, & \text{se } j = 1 \wedge i = 2, ..., n+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad n \geq 3, \quad -\frac{1}{2} < \alpha < +\frac{1}{2}:$$

1.1) localizzare gli autovalori di A e fornire una maggiorazione per $K_2(A)$;

1.2) calcolare $\|A\|_\infty$ nel caso generale e nel caso particolare $\alpha = \frac{1}{3}$ e $n = 5$.

2) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con A matrice $n \times n$ ($n \geq 3$) di elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} 4 & \text{se } i = j, \\ -1 & \text{se } |i-j| = 1, \\ 1 - \frac{4}{n} & \text{se } j = 1 \wedge i = n \text{ oppure } i = 1 \wedge j = n, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} :$$

2.1) dire se è definita positiva, giustificando la risposta;

2.2) costruire la matrice di iterazione del metodo di Jacobi e si dica se il metodo iterativo é convergente, motivando la risposta.

3) Si consideri il problema della ricerca delle radici dell'equazione non lineare $\sin x = 1 - x$.

3.1) Dimostrare che esiste una ed un'unica radice α nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{3}]$.

3.2) Scrivere l'iterazione del metodo di Newton e giustificare la buona posizione del metodo.

3.3) Dimostrare che il metodo di Newton converge alla radice α, $\forall x_0 \in [0, \frac{\pi}{3}]$.

3.4) Proporre un differente metodo di punto fisso per l'approssimazione di α.

4) Sia $\phi : [a,b] \to [a,b]$ una funzione continua tale che $\exists L,\ 0 < L < 1$ per cui

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x-y|, \quad \forall x, y \in [a,b].$$

Dimostrare che $\forall x_0 \in [a,b]$ l'iterazione $x_{n+1} = \phi(x_n)$ genera una successione convergente all'unico punto fisso di ϕ nell'intervallo $[a,b]$.

[Suggerimento: seguire la strategia di dimostrazione del caso di $\phi \in C^1[a,b]$.]