CALCOLO NUMERICO 1 (24 gennaio 2013) - Seconda prova in itinere

1) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con A matrice $n \times n$ di elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} 2^i & \text{se } i = j \\ \frac{1}{2}, & \text{se } i = n \wedge j = 1, 2, ..., n-1 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } j = n \wedge i = 1, 2, ..., n-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} :$$

1.1) calcolare $\|A\|_\infty$ e la fattorizzazione $A = LU$ nel caso $n = 4$; generalizzare il risultato al caso di $n > 4$; discutere il problema della fattorizzazione LU nel caso di una matrice B con $b_{ij} = \frac{1}{2}$ se $i = 1 \wedge j = 2, ..., n$ o $j = 1 \wedge i = 2, ..., n$, $b_{ij} = a_{ij}$ altrimenti;

1.2) studiare la convergenza del metodo di Gauss-Seidel.

2) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con A matrice 3×3 di elementi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 2 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \ \alpha > 0 :$$

stabilire per quali valori di α la matrice è diagonalmente dominante, studiare la convergenza del metodo di Jacobi al variare di α e commentare i risultati ottenuti.

3) Si consideri il procedimento iterativo al variare del parametro reale λ:

$$x_{n+1} = \frac{\lambda x_n - \sin(x_n) + 1}{(\lambda + 1)}, \ \ n = 0, 1, 2, ..., \ x_0 \text{ assegnato.}$$

3.1) Caratterizzare dal punto di vista algebrico e localizzare gli eventuali punti fissi α al variare di λ.

3.2) Stabilire se il metodo iterativo converge ad α per ogni scelta di $x_0 \in \mathbb{R}$. Qualè l'ordine di convergenza?

3.3) Considerare il metodo di Newton per approssimare α e fornire un intervallo I tale che il metodo di Newton converga ad α per ogni $x_0 \in I$.

4) Supponendo che esista un valore reale a tale che

$$\int_0^{f(a)} u(t)dt = g(a)$$

per assegnate funzioni u, g, f. Introdurre un metodo iterativo per l'approssimazione di a con opportune ipotesi per le funzioni u, g ed f sufficienti a garantire la convergenza del metodo introdotto.