CALCOLO NUMERICO 1 (24 gennaio 2013) - Seconda prova in itinere

1) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con A matrice $n \times n$ di elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} 2^i & \text{se } i = j \\ \frac{1}{2}, & \text{se } i = n \wedge j = 1, 2, ..., n-1 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } j = n \wedge i = 1, 2, ..., n-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} :$$

1.1) calcolare $\|A\|_\infty$ e la fattorizzazione $A = LU$ nel caso $n = 4$; generalizzare il risultato al caso di $n > 4$; discutere il problema della fattorizzazione LU nel caso di una matrice B con $b_{ij} = \frac{1}{2}$ se $i = 1 \wedge j = 2, ..., n$ o $j = 1 \wedge i = 2, ..., n$, $b_{ij} = a_{ij}$ altrimenti;

1.2) studiare la convergenza del metodo di Gauss-Seidel.

1.1) $$\begin{bmatrix} 2 & & & & 1/2 \\ & 2^2 & & 0 & 1/2 \\ & & 2^3 & & 1/2 \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ 1/2 & 1/2 & \frac{1}{2} & \cdots & 2^n \end{bmatrix}$$

$n=4$: $\|A\|_\infty = 16 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{35}{2}$

$\forall n > 4$: $\|A\|_\infty = 2^n + (n-1)\frac{1}{2}$

$m_{21} = m_{31} = 0$ $\quad m_{41} = \frac{1}{4}$ $\quad a_{44}^{(2)} = 16 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 16 - \frac{1}{8}$

$m_{32} = 0$ $\quad m_{42} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ $\quad a_{44}^{(3)} = 16 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = 16 - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$

$m_{43} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$ $\quad a_{44}^{(4)} = 16 - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} = 16 - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32}$

In generale

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & & & 1/2 \\ & 2^2 & & 1/2 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

$l_{ii} = 1$ $\qquad u_{ij} = a_{ij} \quad ij \neq nn$

$l_{n,j} = \frac{1}{2^{j+1}} \quad j = 1, \dots, n-1$ $\qquad u_{nn} = 2^n - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} \dots = 2^n - \sum_{i=3}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^j$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2^2 & & & \\ \frac{1}{2} & & \ddots & & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & \\ \frac{1}{2} & & & & 2^n \end{bmatrix}$$

LU $\rightarrow$ fill-in

1.2) Varie possibilità

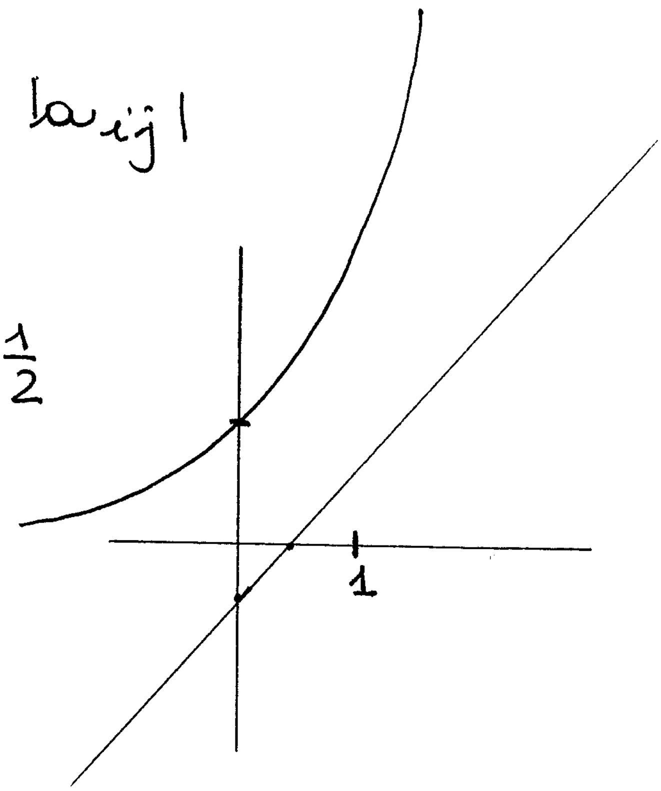
- Calcolo $\rho(B_{GS})$.
- Simmetria di A + def. pos (Gershgorin)
- $\boxed{\text{Diagonalmente dominante } \forall n}$ (facile!)

$$\forall i \quad a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

$$2^i > (i-1)\frac{1}{2}$$

$$2^x > \frac{(x-1)}{2}$$

$\forall x$



2) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con A matrice 3×3 di elementi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 2 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \ \alpha > 0:$$

stabilire per quali valori di α la matrice è diagonalmente dominante, studiare la convergenza del metodo di Jacobi al variare di α e commentare i risultati ottenuti.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 2 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha > 0$$

MI 2° itinere 24/1/2013

2.1) D.D. $\begin{cases} 1 > 2\alpha \\ 2 > 2\alpha \end{cases} \Rightarrow 0 < \alpha < \frac{1}{2}$

2.2)
$$\begin{bmatrix} \lambda & \alpha & \alpha \\ \alpha & 2\lambda & \alpha \\ \alpha & \alpha & \lambda \end{bmatrix} = \lambda(2\lambda^2 - \alpha^2) - \alpha(\alpha\lambda - \alpha^2) + \alpha(\alpha^2 - 2\alpha\lambda) =$$

$$= 2\lambda^3 - \alpha^2\lambda - \alpha^2\lambda + \alpha^3 + \alpha^3 - 2\alpha^2\lambda =$$

$$= 2\lambda^3 - 4\alpha^2\lambda + 2\alpha^3 = 2(\lambda^3 - 2\alpha^2\lambda + \alpha^3) = 0$$

$$p(\alpha) = 0 \qquad (\lambda - \alpha)(\lambda^2 + \alpha\lambda - \alpha^2) = 0$$

$$\lambda = \alpha \qquad \lambda = \frac{-\alpha \pm \sqrt{5\alpha^2}}{2} = \frac{\alpha}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$$

$$\alpha > 0 \Rightarrow \quad \rho(B_J) = \max\left\{\frac{\alpha}{2}(1+\sqrt{5}); \alpha\right\} = \frac{(1+\sqrt{5})\alpha}{2}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha < 1 \qquad \alpha < \frac{2}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

C.S. C.N.S $\qquad \simeq 0.618$

2.3) OSS. $\frac{1}{2} < 0.618$