3) Si consideri il procedimento iterativo al variare del parametro reale λ:

$$x_{n+1} = \frac{\lambda x_n - \sin(x_n) + 1}{(\lambda + 1)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x_0 \text{ assegnato.}$$

3.1) Caratterizzare dal punto di vista algebrico e localizzare gli eventuali punti fissi α al variare di λ.

3.2) Stabilire se il metodo iterativo converge ad α per ogni scelta di $x_0 \in \mathbb{R}$. Qualè l'ordine di convergenza?

3.3) Considerare il metodo di Newton per approssimare α e fornire un intervallo I tale che il metodo di Newton converga ad α per ogni $x_0 \in I$.

Milano

II^a itinere

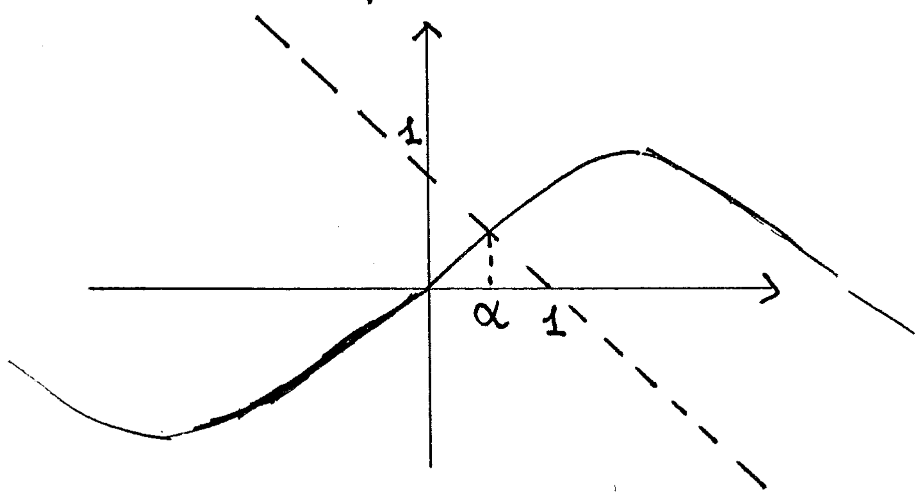
24/01/2013

$x_n \to \infty$ $\quad\quad \lambda \neq -1$

$$x = \frac{\lambda x - \sin x + 1}{\lambda + 1}$$

$$\cancel{\lambda x} + x = \cancel{\lambda x} - \sin x + 1 \quad\quad f(x) = \sin x + x - 1$$

$$1 - x = \sin x$$



$\exists!\, \alpha$ t.c. $f(\alpha) = 0$ $\quad\quad \alpha \in (0, 1)$

$$\left[f(0) = -1 \quad f(1) = \sin 1; \; f'(x) = \cos x + 1 > 0 \right]$$

Studio della funzione d' iterazione

$$g_\lambda(x)=\frac{\lambda x-\sin x+1}{\lambda+1}\qquad \lambda\neq-1$$

$$g'_\lambda(x)=\frac{\lambda-\cos x}{\lambda+1}$$

Ricerca dei valori di λ per i quali si ha $|g'_\lambda(\alpha)|<1$.

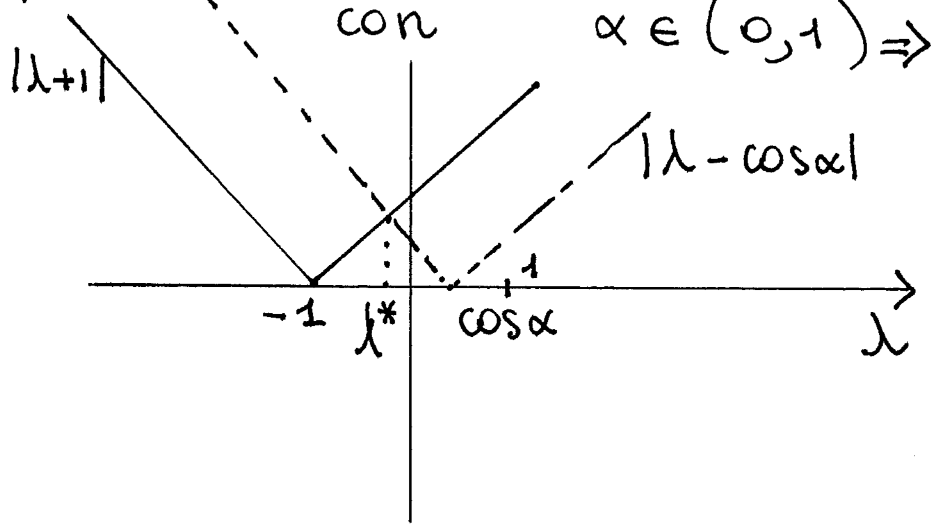
Per questi valori di λ si avrà convergenza per scelte di x_0 in un intorno di α opportuno

$$\frac{|\lambda-\cos\alpha|}{|\lambda+1|}<1 \qquad |\lambda-\cos\alpha|<|\lambda+1|$$

con

per esempio: $\alpha\in(0,1)\Rightarrow\cos\alpha\in(\cos 1,1)$

$(0.54,1)$



$$-\lambda+\cos\alpha=\lambda+1 \qquad 2\lambda=\cos\alpha-1 \qquad \lambda=\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}=\lambda^*$$

$|g'_\lambda(\alpha)|<1$ per $\lambda>\lambda^*$

$$\lambda>\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\cos\alpha-1)$$

ordine

$$g'_\lambda(\alpha) = \frac{\lambda - \cos\alpha}{\lambda+1}$$

Nel caso in cui λ sia un valore per cui si ha convergenza:

- $\lambda \neq \cos\alpha$ 1° ordine

- $\lambda = \cos\alpha$

$$g(x) = \frac{\cos\alpha \, x - \sin x + 1}{\cos\alpha + 1}$$

$$g'(x) = \frac{\cos\alpha - \cos x}{\cos\alpha + 1} \quad \Big| \; = 0$$

$\cos x = \cos\alpha$

$x = \arccos\alpha$

$$g''(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos\alpha + 1} \quad \Big| \; \neq 0$$

$x = \arccos\alpha$

$0 < \alpha < 1$ ($\alpha = 0$ non è p. fisso)

$\Rightarrow$ ordine 2

METODO DI NEWTON.

$$f(x) = x + \sin x - 1$$

$I = (0, 1)$

$f(0) = -1$

$f(1) = \sin 1$

$f'(x) = 1 + \cos x > 0$

$f''(x) = -\sin x \leq 0$

$f'(0) = 2$

$f'(1) = 1 + \cos 1$

$$\left| \frac{f(0)}{f'(0)} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

$$\left| \frac{f(1)}{f'(1)} \right| = \frac{\sin 1}{1 + \cos 1} = \frac{0.84}{1.54} < 1$$