CALCOLO NUMERICO 1 (30 Gennaio 2014)

1) Trovare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{x(1-x)}$$

e stabilire per quali x il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 1$.

2) Si vuole approssimare l'integrale definito $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, $f \in C^\infty[0,1]$, mediante una formula di quadratura del tipo

$$\tilde{I}(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f^{(k)}(1/3),$$

con n intero non negativo. Trovare il minimo valore di n, ed i corrispondenti valori dei pesi A_k, in modo tale che la formula abbia grado di precisione uguale ad uno. Generalizzare la formula di quadratura all'integrale definito $I = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

3) Data la funzione $f(x) = x(x-2)^2$ studiare al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ la convergenza e l' ordine del metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$, dove $g(x) = x + f(x)$.

4) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sia B_ω la matrice di iterazione del metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \omega \mathbf{x}_{JAC}^{(k+\frac{1}{2})} + (1-\omega)\mathbf{x}^{(k)}, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

dove, $\forall k \geq 0$, $\mathbf{x}_{JAC}^{(k+\frac{1}{2})}$ è un vettore ausiliario intermedio applicando un passo del metodo di Jacobi al vettore $\mathbf{x}^{(k)}$. Costruire la matrice B_ω, calcolare $det(B_\omega)$ e determinare se esistono valori di ω per i quali si ha $\|B_\omega\|_\infty \leq 1$.

5) Verificare che per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ simmetrica e definita positiva:

5.1) gli elementi della diagonale principale sono positivi;

5.2) l'elemento di modulo massimo si trova sulla diagonale principale.