CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 29 gennaio 2014

1) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

considerare il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha\left(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}\right),\ k \geq 0,\ \mathbf{x}^{(0)} \text{ assegnato.}$$

Trovare numericamente il valore ottimale α_{ott} che minimizza il raggio spettrale $\rho(B_\alpha)$ della matrice di iterazione B_α al variare di $\alpha \in [0 : 0.01 : 1]$.

Costruire poi il termine noto corrispondente alla soluzione $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)^T$ e approssimare la soluzione con il metodo iterativo dato, con $\alpha = \alpha_{\mathrm{ott}}$, $\mathbf{x}^{(0)} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)^T$ e test d'arresto $\|A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}\|_2 < 10^{-8}$. Sia `iter` il numero di iterazioni eseguite.

<u>RISULTATI</u>

$\alpha_{\mathrm{ott}} =$ $\qquad\qquad$ $\rho(B_{\alpha_{\mathrm{ott}}}) =$ $\qquad\qquad$ `iter` $=$

2) Sia $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ definita nell'intervallo $I = [-2, 3]$ e si considerino i nodi di interpolazione $x_0 = -2, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. Dati inoltre 1000 nodi equispaziati $z_j,\ j = 1, ..., 1000$ nell'intervallo I:

2.1) si calcoli $M_4 = \|\omega\|_{\infty,d}$, dove

$$\|g\|_{\infty,d} \equiv \max_{j=1,\dots,1000} |g(z_j)|,\ \omega(x) = \prod_{i=0}^{3}(x - x_i);$$

2.2) si consideri il polinomio $p_3 \in \mathbb{P}_3$ che interpola f nei nodi $(x_i, y_i = f(x_i)), i = 0, \dots, 3$ e il polinomio $\widetilde{p}_3 \in \mathbb{P}_3$ che interpola i dati perturbati $\tilde{y}_i \approx y_i$, ottenuti con il comando `yitilde=yi+delta*rand(1)`, con $\delta = 10^{-3}$. Si verifichi sperimentalmente la disuguaglianza

$$\|\widetilde{p}_3 - p_3\|_{\infty,d} \leq \|\Delta\|_{\infty,d}, \qquad \text{dove} \qquad \Delta(x) = \delta\sum_{i=0}^{3}|L_i(x)|,$$

$L_i \in \mathbb{P}_3$ essendo l' i-esimo polinomio di base di Lagrange (si veda a questo proposito il file `lagr.m`).

<u>RISULTATI</u>

$M_4 =$ $\qquad\qquad$ $\|\widetilde{p}_3 - p_3\|_{\infty,d} =$ $\qquad\qquad$ $\|\Delta\|_{\infty,d} =$

3) Si consideri il problema del calcolo della radice reale α di modulo massimo dell' equazione algebrica

$$x^5 + 5x^4 - 5 = 0.$$

3.1) Trovare α mediante la funzione MATLAB `roots`.

3.2) Approssimare α con il metodo di Newton utilizzando $x_0 = -6.5$ e test d'arresto $|x^{(k)} - \alpha| < \varepsilon$, con $\varepsilon = 10^{-4}$ e $\varepsilon = 10^{-12}$. Sia `iter` il numero di iterazioni eseguite.

3.3) Verificare che il metodo di Newton è del secondo ordine, calcolando

$$r_k = \frac{|x^{(k)} - \alpha|}{|x^{(k-1)} - \alpha|^2}, \quad k = 1, \ldots, \texttt{iter}.$$

<u>RISULTATI</u>

$\alpha =$

	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-12}$
`iter`		
$x^{(\texttt{iter})}$		
$r_{(\texttt{iter})}$		