CALCOLO NUMERICO 1 (23 Gennaio 2014) - Seconda prova in itinere

1) La funzione $f(x) = e^x - 10x - 1$ ha due radici: $\alpha = 0$ e $\beta \in (n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$. Si determini il valore di n. Si stabilisca inoltre il numero di passi k del metodo di bisezione applicato all'intervallo $(n, n+1)$ affinché l'iterata x_k verifichi la maggiorazione

$$\frac{|\beta - x_k|}{|\beta|} < 10^{-5}.$$

2) Data la funzione $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)$ studiare al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ la convergenza e l' ordine dei metodi iterativi $x_{n+1} = [g(x_n)]^k$ per la ricerca dei punti fissi delle funzioni $[g(x)]^k$, con $k = 2$ e $k = 3$.

3) Si consideri la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ed il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/4 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1/2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Calcolare, al variare del parametro n, $A\mathbf{x}$, $\|A\mathbf{x}\|_2$, $\|\mathbf{x}\|_2$. Mostrare che A può essere scritta come prodotto di matrici elementari di Gauss e, tramite questa proprietà, dare una maggiorazione della norma $\|A^{-1}\|_\infty$.

4) Si consideri un sistema lineare con matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & \alpha \\ 0 & \alpha & 3 \end{pmatrix}$$

con α parametro reale. Discutere la convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss Seidel. Nel caso di convergenza stabilire la relazione tra le corrispondenti velocità asintotiche.

5) Si consideri la sequenza di vettori $\mathbf{x}^{(k)}$, $k = 0, 1, ...$, generati da un metodo iterativo per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indichiamo con $\mathbf{r}^{(k)} = b - A\mathbf{x}^{(k)}$ i residui, e con $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$ l'errore al passo k. Dimostrare che

$$\frac{\|\mathbf{e}^{(k)}\|}{\|\mathbf{e}^{(0)}\|} \le K(A)\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{r}^{(0)}\|},$$

dove $\|\cdot\|$ è una norma naturale e $K(A)$ il corrispondente numero di condizionamento di A.