CALCOLO NUMERICO 1 (29 gennaio 2015)

n.1) Si consideri la seguente formula di quadratura numerica per l'approssimazione dell'integrale $\int_a^b f(x)dx$, $a < b$ numeri reali,

$$Q(f) = h\left[\alpha f(a) + \beta f(a + \gamma h)\right],$$

dove $h = (b - a)$.

1.1) Determinare i valori dei parametri reali α, β, γ in modo tale che la formula abbia grado di precisione polinomiale massimo.

1.2) La formula ottimale ottenuta sopra è una formula Gaussiana?

Verifichiamo con $f \equiv 1 \Rightarrow I(f) = b - a = h$,

$$h = h\left[\alpha + \beta\right] \Rightarrow \boxed{(\alpha + \beta) = 1}$$

Poi $f(x) = x \Rightarrow I(f) = (b^2 - a^2)/2 = (b - a)(b + a)/2 = h(b + a)/2$,

$$h\frac{(b + a)}{2} = h\left[\alpha a + \beta(a + \gamma h)\right] \Rightarrow \boxed{\frac{(b + a)}{2} = \left[(\alpha + \beta)a + \beta\gamma h\right]},$$

quindi, essendo $(\alpha + \beta) = 1$,

$$\frac{(b + a)}{2} - a = \beta\gamma h \Rightarrow \boxed{\beta\gamma = \frac{1}{2}}.$$

Infine per $f(x) = x^2 \Rightarrow I(f) = (b^3 - a^3)/3 = (b - a)(a^2 + ab + b^2)/3 = h(a^2 + ab + b^2)/3$, quindi

$$h\frac{(a^2 + ab + b^2)}{3} = h\left[\alpha a^2 + \beta(a + \gamma h)^2\right].$$

Sviluppando il quadrato nelle parte tra parentesi quadre e raccogliendo

$$\frac{(a^2 + ab + b^2)}{3} = \left[(\alpha + \beta)a^2 + 2a\beta\gamma h + \beta\gamma^2 h^2\right],$$

utilizzando le relazioni precedenti $(\alpha + \beta) = 1$, $\beta\gamma = 1/2$, $h = b - a$.

$$\frac{(a^2 + ab + b^2)}{3} - a^2 - a(b - a) = \frac{h^2\gamma}{2} \Rightarrow \frac{(a^2 - 2ab + b^2)}{3} = \frac{h^2\gamma}{2},$$

da cui $\gamma = 2/3$, e quindi $\beta = 3/4$, $\alpha = 1/4$. Per verificare che grado è due basta mettersi in un particolare intervallo, per esempio $a = 0$, $b = 1$, con $f(x) = x^3$. Non è una formula Gaussiana.

Ex 2 [1]

MILANO

29-01-2015

2) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\} :$$

2.1) determinare per quali valori di α la matrice è definita positiva;

2.2) determinare per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel converge ;

2.3) stabilire la relazione tra le velocità di convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel.

2.4) trovare un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\lambda(A) \in I$, $\forall \lambda(A) \in \sigma(A)$.

2.1) Matrice simmetrica
Criterio di Sylvester

$$\begin{cases} \alpha > 0 \\ 2\alpha^2 - 1 > 0 \\ \alpha(4\alpha^2-1) - (2\alpha) > 0 \\ \det A > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha > 0 \\ |\alpha| > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \alpha(4\alpha^2 - 3) > 0 \\ (4\alpha^2-1)(\alpha^2-1) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha > 0 \\ |\alpha| > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} < \alpha < 0 \lor \alpha > \frac{\sqrt{3}}{2} \\ |\alpha| > 1 \lor |\alpha| < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha > 1$$

$$\det A = \alpha \begin{vmatrix} 2\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2\alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha\left[2\alpha(2\alpha^2-1) - \alpha\right] - (2\alpha^2-1) =$$

$$= \alpha(4\alpha^3 - 3\alpha) - 2\alpha^2 + 1 = 4\alpha^4 - 5\alpha^2 + 1 = (4\alpha^2-1)(\alpha^2-1)$$

2.2)
$$\det \begin{pmatrix} \alpha\lambda & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\alpha\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 2\alpha\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & \alpha\lambda \end{pmatrix} = \alpha\lambda \begin{vmatrix} 2\alpha\lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 2\alpha\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & \alpha\lambda \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 2\alpha\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & \alpha\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\alpha\lambda\left[2\alpha\lambda(2\alpha^2\lambda^2 - \lambda) - \lambda(\alpha\lambda)\right] - \lambda(2\alpha^2\lambda^2 - \lambda) =$$

$$\alpha\lambda(4\alpha^3\lambda^3 - 2\alpha\lambda^2 - \alpha\lambda^2) - 2\alpha^2\lambda^3 + \lambda^2 = 4\alpha^4\lambda^4 - 5\alpha^2\lambda^3 + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2(4\alpha^4\lambda^2 - 5\alpha^2\lambda^2 + 1) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 0$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{\alpha^2} \qquad \lambda_4 = \frac{1}{4\alpha^2}$$

$\rho(B_{GS}) = \frac{1}{\alpha^2}$

Converge: $|\alpha| > 1$

2.3) matrice tridiagonale

$\rho(B_{GS}) = [\rho(B_J)]^2$

$\rho(B_J) = \frac{1}{|\alpha|}$

Condizione di convergenza simultanea $|\alpha|>1$

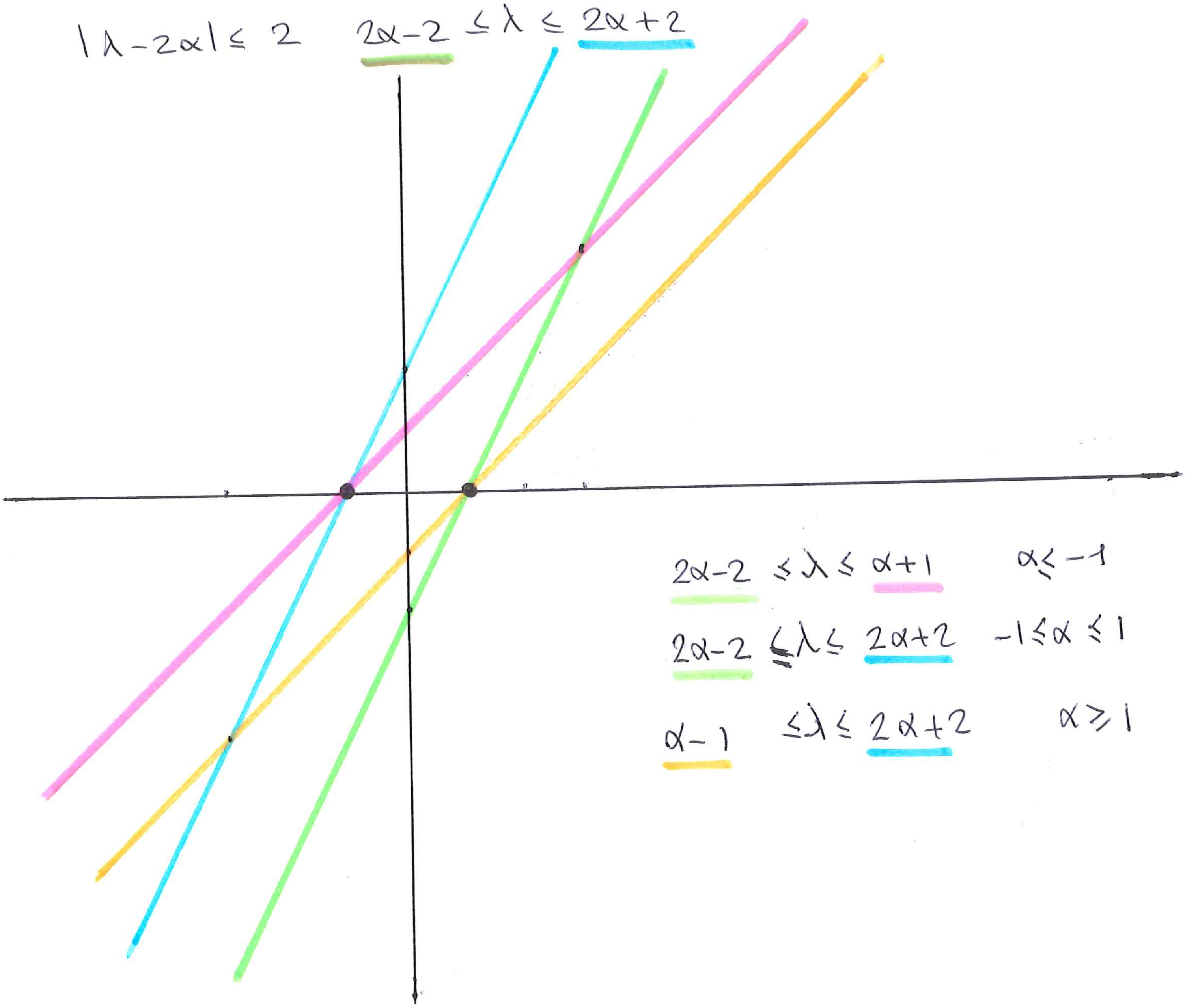
$R(B_{GS}) = 2\,R(B_J)$

2.4) A simmetrica $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Cerchi di Gershgorin $\Rightarrow$ Intervalli di $\mathbb{R}$

$|\lambda-\alpha| \leq 1 \qquad \alpha-1 \leq \lambda \leq \alpha+1$

$|\lambda-2\alpha| \leq 2 \qquad 2\alpha-2 \leq \lambda \leq 2\alpha+2$



$2\alpha-2 \leq \lambda \leq \alpha+1 \qquad \alpha \leq -1$

$2\alpha-2 \leq \lambda \leq 2\alpha+2 \qquad -1 \leq \alpha \leq 1$

$\alpha-1 \leq \lambda \leq 2\alpha+2 \qquad \alpha \geq 1$

Ex3 $\boxed{4}$

Milano 29-01-15

3) Studiare al variare di $x_0 \in \mathbb{R}^+$ la convergenza e l' ordine del metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$, dove $g(x) = k\sqrt{x} - x$, $x > 0$ e $k \in \mathbb{R}$.
Posto $f(x) = g(x) - x$, con $k > 0$, $x > 0$, dimostrare che il metodo di Newton converge alla radice positiva di f, $\forall x_0 \in [\frac{k^2}{8}, \frac{k^2}{2}]$.

C.E. $x \geq 0$ (nell' esercizio $x>0$)

1) $\boxed{k>0}$

Ricerca dei punti fissi $k\sqrt{x} - x = x$ $\quad k\sqrt{x} = 2x$ $\quad \frac{k^2}{4}x = x^2$ $\begin{cases} x=0 \\ x=\frac{k^2}{4} \end{cases}$

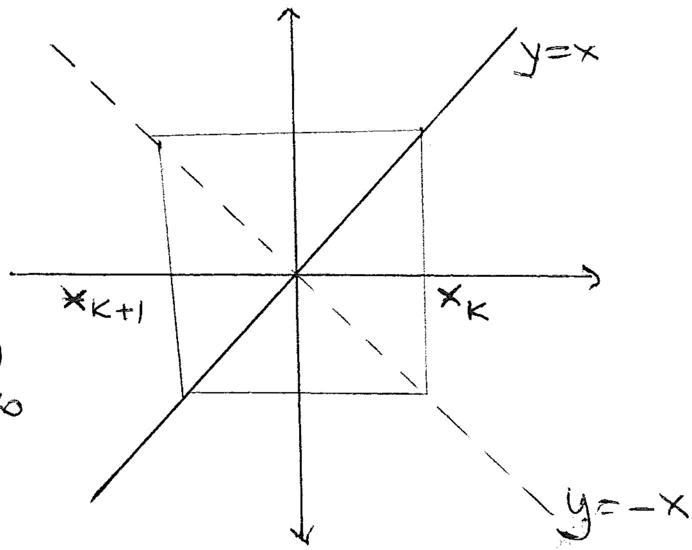
$g(x)=0$ $\quad k\sqrt{x} = x$ $\quad \begin{matrix} x=0 \\ x=k^2 \end{matrix}$

$g'(x) = \frac{k}{2\sqrt{x}} - 1 \geq 0 \quad \frac{k}{2\sqrt{x}} \geq 1 \quad \sqrt{x} \leq \frac{k}{2} \quad x \leq \frac{k^2}{4}$ $\quad \lim_{x \to 0^+} g'(x) = +\infty$

$g''(x) = \frac{k}{2}\left(-\frac{1}{2}\ \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) < 0 \quad \forall x$ (vedi foglio 2) $M\left(\frac{k^2}{4}; \frac{k^2}{4}\right)$

2) $\boxed{k=0}$

$g(x) = -x$



$x_{k+1} = -x_k$

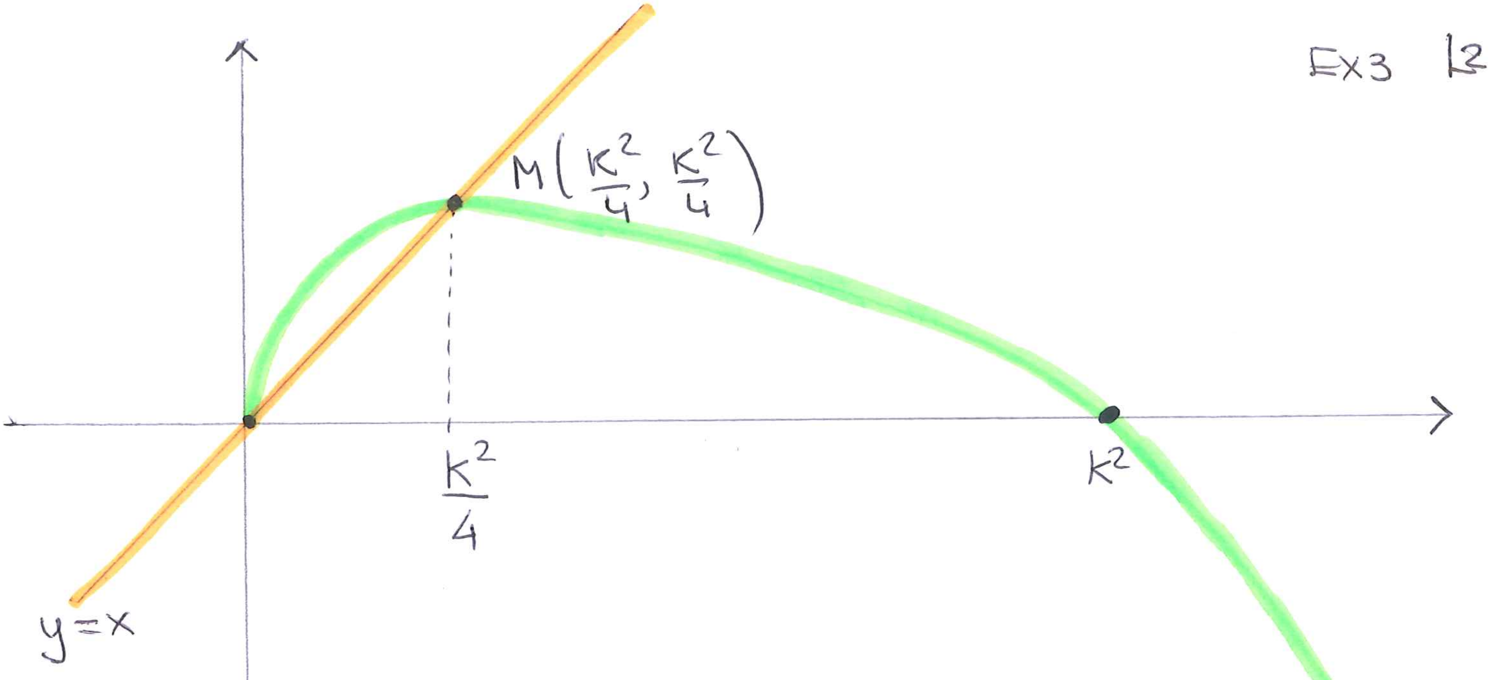
$x_0 > 0$ $\quad x_k = (-1)^k x_0$ | $x_0 < 0$ $\quad x_k = (-1)^{k+1} x_0$

$\boxed{\text{Non converge}}$

3) $\boxed{k<0}$ $\quad g(x) = k\sqrt{x} - x < 0 \quad \forall x > 0$

$x_0 > 0$

$x_1 < 0 \notin$ C.E.



1) $0 < x_0 < \frac{K^2}{4}$

Successione monotona crescente lim. sup. da $\frac{K^2}{4}$: $x_k \nearrow \frac{K^2}{4}$

2) $\frac{K^2}{4} < x_0 < K^2$

$0 < x_1 < \frac{K^2}{4}$ $\Rightarrow$ caso 1 $\Rightarrow$ conv. a $\frac{K^2}{4}$

3) $x_0 > K^2$

$x_1 < 0$ $\notin$ C.E. (STOP)

4) $x_0 = K^2$, $x_1 = 0$ (punto fisso = origine)

Ordine: $g'\left(\frac{K^2}{4}\right) = 0$, $g''\left(\frac{K^2}{4}\right) \neq 0$ $\Rightarrow$ ordine 2

[oss: $\exists$ punto fisso $\alpha = 0$, ma non si ha convergenza a 0: $\lim_{x \to 0^+} g'(x) = +\infty \Rightarrow$ divergenza locale

$\Downarrow$ convergenza a $\frac{K^2}{4}$.]

$\Downarrow$ a meno che $x_0 = 0 \vee x_0 = K^2$

$f(x) = g(x) - x = K\sqrt{x} - x - x = K\sqrt{x} - 2x$

$I = \left[\frac{K^2}{8}, \frac{K^2}{2}\right]$

Verifica ipotesi teorema di convergenza del metodo di Newton

1) $f\left(\frac{K^2}{8}\right) = K \cdot \frac{K}{2\sqrt{2}} - 2 \cdot \frac{K^2}{8} = K^2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\right) = K^2 \frac{\sqrt{2}-1}{4} > 0$

$f\left(\frac{K^2}{2}\right) = K \cdot \frac{K}{\sqrt{2}} - 2\frac{K^2}{2} = K^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) = K^2 \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} < 0$

2) $f'(x) = \frac{K}{2\sqrt{x}} - 2 > 0 \qquad \frac{K - 4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} > 0 \qquad \sqrt{x} < \frac{K}{4} \qquad x < \frac{K^2}{16} < \frac{K^2}{8}$

$\Rightarrow f'(x) < 0$ in I

3) $f''(x) = \frac{K}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x\sqrt{x}} < 0 \qquad \forall x \in I$

4) $f'\left(\frac{K^2}{8}\right) = \frac{\cancel{K}}{\cancel{2}} \frac{1}{\frac{\cancel{K}}{\cancel{2}\sqrt{2}}} - 2 = \sqrt{2} - 2$

$\frac{K^2}{2} - \frac{K^2}{8} = \frac{3}{8}K^2$

$f'\left(\frac{K^2}{2}\right) = \frac{K}{2} \frac{1}{\frac{K}{\sqrt{2}}} - 2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 = \frac{\sqrt{2}-4}{2}$

$\left|\frac{f\left(\frac{K^2}{8}\right)}{f'\left(\frac{K^2}{8}\right)}\right| = \left|K^2 \frac{\sqrt{2}-1}{4} \cdot \frac{1}{\underset{\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{\sqrt{2}-2}}\right| = \frac{K^2}{4\sqrt{2}}$

$\left|\frac{f\left(\frac{K^2}{2}\right)}{f'\left(\frac{K^2}{2}\right)}\right| = \left|K^2 \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}-4}\right| = K^2 \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-4} \approx 0.22 K^2 < \frac{3}{8}$

$\Rightarrow$ mdN converge $\forall x_0 \in I$, alla radice $\frac{K^2}{4} \in I$

4) Determinare i parametri $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 2x - x^3 & 0 \le x < 1 \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

sia una spline cubica naturale su $[0,2]$. La spline trovata interpola la funzione $F(x) = 1 + \ln(x+1)$ nei punti $\{0, 1, 2\}$?

Milano

29-01-2015

$$S'(x) = \begin{cases} 2 - 3x^2 & [0,1) \\ b + 2c(x-1) + 3d(x-1)^2 & [1,2] \end{cases} \qquad S''(x) = \begin{cases} -6x \\ 2c + 6d(x-1) \end{cases}$$

$S(1^-) = 2 \qquad S(1^+) = a \qquad \Rightarrow \qquad a = 2$

$S'(1^-) = -1 \qquad S'(1^+) = b \qquad \Rightarrow \qquad b = -1$

$S''(1^-) = -6 \qquad S''(1^+) = 2c \qquad \Rightarrow \qquad c = -3$

$S''(0) = 0 \quad \forall a, b, c, d \qquad S''(2) = 2c + 6d \Rightarrow -6 + 6d = 0 \quad d = 1$

(condizioni di naturalità)

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 2x - x^3 & 0 \le x < 1 \\ 2 - (x-1) - 3(x-1)^2 + (x-1)^3 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$F(0) = 1 \qquad (0, 1) \qquad S(0) = 1$

$F(1) = 1 + \ln 2 \qquad (1, 1 + \ln 2) \qquad S(1) = 2$

$F(2) = 1 + \ln 3 \qquad (2, 1 + \ln 3) \qquad S(2) = 2 - 1 - 3 + 1 = -1$

La spline trovata interpola F solo in $x = 0$.

5) Indicare per quali valori di $h \in [0,1]$ esiste uno ed unico polinomio di quarto grado p_4 tale che

$$p_4(0) = y_0\ ,\quad p_4(h) = y_1\ ,\quad p_4(1) = y_2\ ,\quad p_4'(0) = z_0\ ,\quad p_4'(1) = z_1\ ,$$

per ogni insieme di dati y_0, y_1, y_2, z_0, z_1.

Milano

29-01-2015

$$p_4(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$p_4'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$\begin{aligned}
p_4(0) &= e &&= y_0 \\
p_4(h) &= ah^4 + bh^3 + ch^2 + dh + e &&= y_1 \\
p_4(1) &= a + b + c + d + e &&= y_2 \\
p_4'(0) &= d &&= z_0 \\
p_4'(1) &= 4a + 3b + 2c + d &&= z_1
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ h^4 & h^3 & h^2 & h & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ z_0 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

$$A\,\underline{x} = \underline{f}$$

$\det A \neq 0$

$$\begin{vmatrix} h^4 & h^3 & h^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = h^4(-1) - h^3(-2) + h^2(-1) \neq 0$$

$$h^4 - 2h^3 + h^2 \neq 0$$

$$h^2(h-1)^2 \neq 0 \qquad h \neq 0$$

$$h \neq 1$$