CALCOLO NUMERICO 1 (29 gennaio 2015)
COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE

1) Determinare i valori α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ in modo tale che la formula di quadratura

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[\alpha f(a) + \beta f(a+\gamma h)\right], \quad a<b, \quad h=(b-a),$$

abbia grado di precisione massimo. La formula ottenuta è Gaussiana?

2) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\} :$$

2.1) determinare per quali valori di α la matrice è definita positiva;

2.2) determinare per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel converge ;

2.3) stabilire la relazione tra le velocità di convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel.

2.4) trovare un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\lambda(A) \in I$, $\forall \lambda(A) \in \sigma(A)$.

3) Studiare al variare di $x_0 \in \mathbb{R}^+$ la convergenza e l' ordine del metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$, dove $g(x) = k\sqrt{x} - x$, $x > 0$ e $k \in \mathbb{R}$.

Posto $f(x) = g(x) - x$, con $k > 0$, $x > 0$, dimostrare che il metodo di Newton converge alla radice positiva di f, $\forall x_0 \in [\frac{k^2}{8}, \frac{k^2}{2}]$.

4) Determinare i parametri a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 2x - x^3 & 0 \le x < 1 \\ \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

sia una spline cubica naturale su $[0, 2]$. La spline trovata interpola la funzione $F(x) = 1 + \ln(x+1)$ nei punti $\{0, 1, 2\}$?

5) Indicare per quali valori di $h \in [0, 1]$ esiste uno ed unico polinomio di quarto grado p_4 tale che

$$p_4(0) = y_0\ , \quad p_4(h) = y_1\ , \quad p_4(1) = y_2\ , \quad p_4'(0) = z_0\ , \quad p_4'(1) = z_1\ ,$$

per ogni insieme di dati y_0, y_1, y_2, z_0, z_1.