CALCOLO NUMERICO 1 (22 Gennaio 2015) - Seconda prova in itinere
- GIUSTIFICARE LE RISPOSTE -

1) Data la funzione $f(x) = x^3 - x$, studiare al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ la convergenza e l' ordine del metodo iterativo

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 3x_n}{3x_n^2 + 1}$$

per l'approssimazione degli zeri di f.

2) Si consideri la seguente matrice A bidiagonale di ordine N,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & & & 0 \\ & 1 & 3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 3 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare A^{-1} ed i numeri di condizionamento $K_\infty(A)$ e $K_1(A)$.

3) Si consideri l'equazione non lineare $f(x) \equiv e^x - ax = 0,\ a > 0$.

3.1) Studiare il numero di radici reali di f al variare di $a > 0$.

3.2) Per i valori di a per i quali la funzione f ha 2 radici reali distinte α e β $(0 < \alpha < 1 < \beta)$, dimostrare che il metodo di Newton converge alla radice α per ogni $x_0 \in [-1, 1]$.

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 8 & \beta & 0 \\ \beta & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Siano $C = \{\beta \in \mathbb{R} \mid \exists A^{-1}\}$, $J = \{\beta \in \mathbb{R} \mid \text{il metodo di Jacobi converge}\}$, $GS = \{\beta \in \mathbb{R} \mid \text{il metodo di Gauss} - \text{Seidel converge}\}$.

4.1) Determinare gli insiemi $C,\ J,\ GS$.

4.2) Sia $\beta \in GS$, per quali $\alpha > 0$ il metodo $\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} + \alpha(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(n)})$ converge?

5) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ uno scalare e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathbf{N}}$ due vettori (colonna), si consideri la matrice

$$H = I - \alpha \mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathbf{T}}.$$

Trovare per quali α tale matrice è invertibile e trovare l'espressione dell'inversa, nel caso esista, nella forma

$$H^{-1} = I - \beta \mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathbf{T}},$$

per un opportuno scalare β.