CALCOLO NUMERICO 1 (28 Gennaio 2016) - Prova scritta

COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

1) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{3x+1} - \frac{1}{3x+2}, \quad x > 0$$

e stabilire per quali x il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 1$.

$$K_f(x) = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right| \qquad f(x) = \frac{3x+2-3x-1}{(3x+1)(3x+2)} = \frac{1}{(3x+1)(3x+2)}$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(3x+1)^2} + \frac{3}{(3x+2)^2} = -3\,\frac{(3x+2)^2-(3x+1)^2}{(3x+1)^2(3x+2)^2} =$$

$$= -3\,\frac{(3x+2+3x+1)(3x+2-3x-1)}{(3x+1)^2(3x+2)^2} = -3\,\frac{6x+3}{(3x+1)^2(3x+2)^2} = -9\,\frac{2x+1}{(3x+1)^2(3x-1)^2}$$

$$K_f(x) = \left| \frac{9x(2x+1)}{(3x+1)^{\cancel{2}}(3x+2)^{\cancel{2}}} \cdot \underbrace{\cancel{(3x+1)}\cancel{(3x+2)}}_{\frac{1}{f(x)}} \right| = \frac{9x(2x+1)}{(3x+1)(3x+2)} < 1$$

N.B. $x > 0$

$$18x^2 + \cancel{9x} < 9x^2 + \cancel{3x} + \cancel{6x} + 2$$

$$9x^2 < 2$$

$$0 < x < \frac{\sqrt{2}}{3}$$

2) Assegnati i valori reali $a < b$, trovare ω_1 e ω_2 in modo tale che la formula di quadratura,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \omega_1 f\left(a + \frac{b-a}{4}\right) + \omega_2 f\left(b - \frac{b-a}{4}\right)$$

abbia grado di precisione massimo. Applicare la formula all'integrale definito

$$\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x,$$

e calcolare l'errore assoluto commesso.

MI

28/1/2016

$$a + \frac{b-a}{4} = \frac{3a+b}{4} = x_1$$

$$b - \frac{b-a}{4} = \frac{3b+a}{4} = x_2$$

1) $r = 0 \quad f = 1$

$$\int_a^b 1\, dx = b - a$$

$$\boxed{\omega_1 + \omega_2 = b - a}$$

2) $r = 1 \quad f = x$

$$\int_a^b x\, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$\boxed{\omega_1\left(\frac{3a+b}{4}\right) + \omega_2\left(\frac{3b+a}{4}\right) = \frac{b^2-a^2}{2}}$$

$$\begin{cases} \omega_1 = b - a - \omega_2 \\ 3a\omega_1 + b\omega_1 + 3b\omega_2 + a\omega_2 = 2b^2 - 2a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_1 = b - a - \omega_2 \\ 3a(b - a - \omega_2) + b(b - a - \omega_2) + 3b\omega_2 + a\omega_2 = 2b^2 - a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - \\ 3ab - 3a^2 - 3a\omega_2 + b^2 - ab - b\omega_2 + 3b\omega_2 + a\omega_2 = 2b^2 - 2a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - \\ 2b\omega_2 - 2a\omega_2 = b^2 - 2ab + a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cdots \\ \omega_2 = \frac{(b-a)^2}{2(b-a)} = \frac{b-a}{2} \end{cases}$$

$\uparrow$

$$\omega_1 = b - a - \frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2$$

F.Q. $a=0$ $b=\pi$

$$x_1 = \frac{3a+b}{4} = \frac{\pi}{4} \qquad x_2 = \frac{3b+a}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

$$w_1 = w_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\tilde{I}(f) = \frac{\pi}{2}\left[\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3}{4}\pi\right] = \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{2} \approx 2.2214\ldots$$

err $= 0.2214$

$$\tilde{I}(f) = \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right]$$

GP 2? $r=2$ $f=x^2$

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3}$$

$$\tilde{I}(f) = \frac{(b-a)}{2}\left[\frac{(3a+b)^2}{16} + \frac{(a+3b)^2}{16}\right] = \frac{(b-a)}{2\cdot 16}\left[9a^2+b^2+a^2+9b^2+12ab\right]$$

$$\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2) = \frac{1}{32}(10a^2+12ab+10b^2)$$

$$\frac{a^2+ab+b^2}{3} = \frac{1}{16}(5a^2+6ab+5b^2) \qquad \Longrightarrow \text{G.P. } 1$$

$$16a^2+16ab+16b^2-15a^2-18ab-15b^2=0$$

$$a^2-2ab+b^2=0 \qquad (a=b)$$

3)
Data l'equazione non lineare $f(x) \equiv x^3 - 3x + 2 = 0$, scrivere la formula del metodo di Newton applicata all'equazione data e, dopo avere dedotto la funzione di iterazione $y = g(x)$ associata, discutere la convergenza e l'ordine del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$, al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$.

Milano
28-01-2016

$$x^3 - 3x + 2 = 0 \qquad (x-1)^2(x+2) = 0$$

$\alpha = -2$ molteplicità 1
$\beta = 1$ " 2

$$f'(x) = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2 = (x-1)(2x+4+x-1) = 3(x-1)(x+1)$$

Metodo di Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k-1)^{\cancel{2}}(x_k+2)}{3\cancel{(x_k-1)}(x_k+1)} = x_k - \frac{x_k^2 - x_k + 2x_k - 2}{3(x_k+1)}$$

$$= \frac{3x_k^2 + 3x_k - x_k^2 - x_k + 2}{3(x_k+1)} = \frac{2}{3}\,\frac{x_k^2 + x_k + 1}{(x_k+1)}$$

$$g(x) = \frac{2}{3}\,\frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{2}{3}\left[\frac{x(x+1)+1}{x+1}\right] = \frac{2}{3}\left[x + \frac{1}{x+1}\right]$$

C.E. $x \neq -1$ Asintoto verticale $x = -1$

$g(-2) = -2$ Asintoto obliquo $y = \frac{2}{3}x$

$g(1) = 1$ $g(x) > 0$ $x > -1$

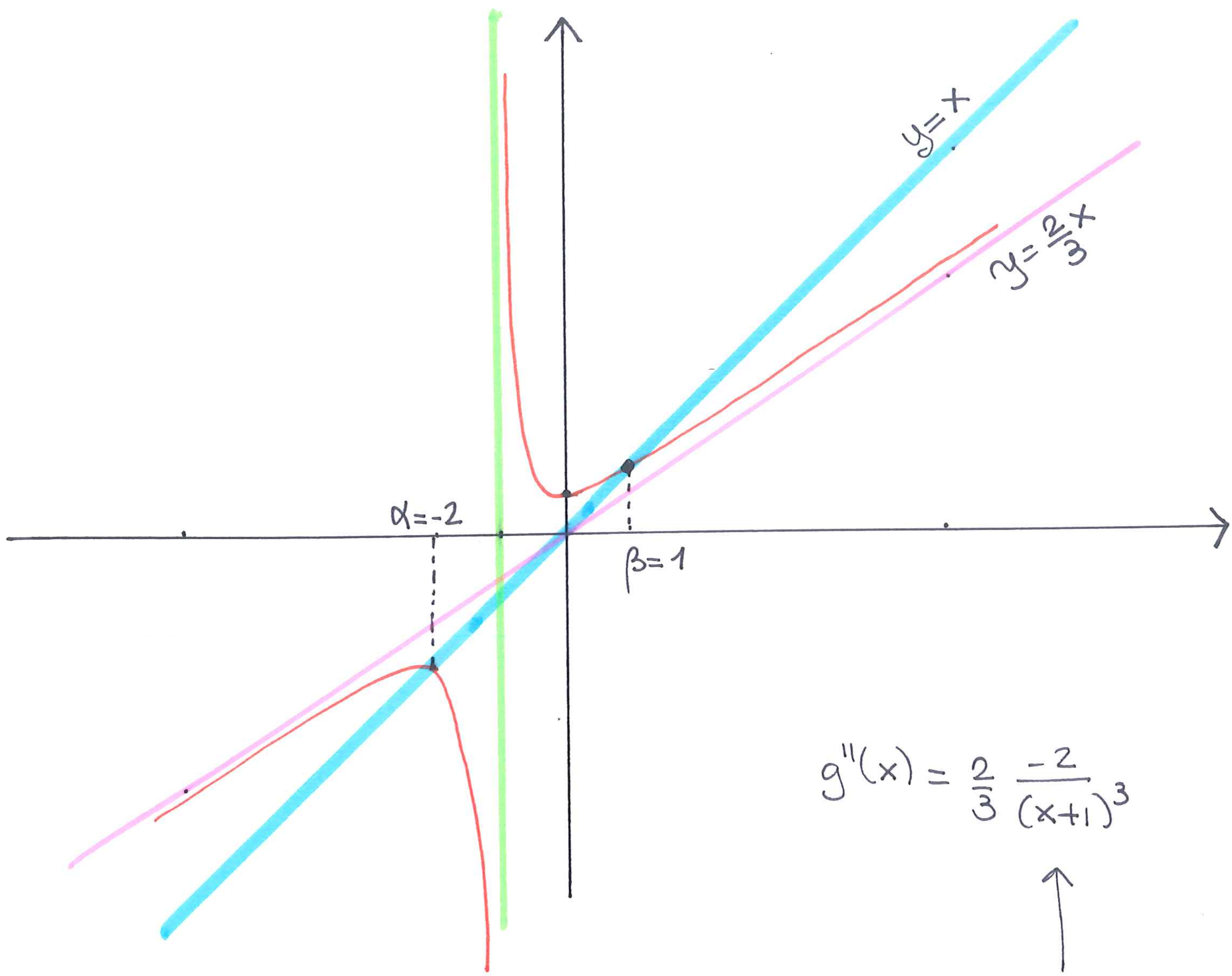
$g(0) = \frac{2}{3}$

$$g'(x) = \frac{2}{3}\left[1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right] \geq 0 \qquad \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} \geq 0 \qquad \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \geq 0$$

$$\frac{x(x+2)}{(x+1)^2} \geq 0$$

	-2		-1		0	
$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$M(-2,-2)$ $\quad m\left(0;\frac{2}{3}\right)$



$$g''(x)=\frac{2}{3}\,\frac{-2}{(x+1)^3}$$

$g'(-2)=0$ convergenza locale, 2° ordine $\left[g''(-2)\neq 0\right]$

$g'(1)=\frac{1}{2}<1$ convergenza locale, 1° ordine

1) • $x_0<\alpha$ Succ. mon. cresc, lim sup da α : $x_k \nearrow \alpha$

2) • $x_0=0$ " costante $x_k=\alpha$

3) • $\alpha<x_0<-1$ $\quad x_1<\alpha$ vedi caso 1)

4) $-1<x_0<0$ (*) $x_1>0$ $\to$ 5) $-\frac{1}{2}<x_0<0$, $0<x_1<1$

$\to$ 6) $-1<x_0<-\frac{1}{2}$ $\quad x_0>\beta$

5) $0<x_0<1$ Succ. mon. cresc. lim sup da β: $x_k\nearrow\beta$

6) $x_0>\beta$ " " decr. lim inf da β: $x_k\searrow\beta$

(*) $g(x)=1$ se $x=-\frac{1}{2}$ $\quad x=1$

4) Siano assegnati il vettore $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ e la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Trovare opportune permutazioni di righe e colonne della matrice A in modo tale che il metodo di Jacobi applicato al sistema lineare $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove C è la matrice ottenuta da A dopo le permutazioni, sia convergente. Trovare le matrici P_1 e P_2 di permutazione tali che $C = P_1 A P_2$.

b) Stimare il numero di iterazioni del metodo di Jacobi in modo tale che l'errore si riduca di 1/1000 rispetto all'errore iniziale utilizzando la norma infinito $\|\cdot\|_\infty$.

a) $$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$ $R_1 \to R_3$, $R_2 \to R_1$, $R_3 \to R_2$; $P_{31} = 1$, $P_{12} = 1$, $P_{23} = 1$

Es: $$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $P_2 = I$

b) $$\|e^{(k)}\|_\infty \leq \|B_J\|_\infty^k \|e^{(0)}\|_\infty$$

$$\|B_J\|_\infty^k < \frac{1}{1000}$$

$$B_J = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|B_J\|_\infty = \frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^k < 0.001$$

$$k \ln\left(\frac{3}{4}\right) < \ln(0.001)$$

$$k > \frac{\ln(0.001)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \cong 24.11 \qquad \bar{k} = 25$$