CALCOLO NUMERICO 1 (28 Gennaio 2016) - Prova scritta

COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

1) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{3x+1} - \frac{1}{3x+2}, \ x > 0$$

e stabilire per quali x il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 1$.

2) Assegnati i valori reali $a < b$, trovare ω_1 e ω_2 in modo tale che la formula di quadratura,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \omega_1 f\left(a + \frac{b-a}{4}\right) + \omega_2 f\left(b - \frac{b-a}{4}\right)$$

abbia grado di precisione massimo. Applicare la formula all'integrale definito

$$\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x,$$

e calcolare l'errore assoluto commesso.

3) Data l'equazione non lineare $f(x) \equiv x^3 - 3x + 2 = 0$, scrivere la formula del metodo di Newton applicata all'equazione data e, dopo avere dedotto la funzione di iterazione $y = g(x)$ associata, discutere la convergenza e l'ordine del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), \ k \geq 0$, al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$.

4) Siano assegnati il vettore $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^\mathbf{3}$ e la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Trovare opportune permutazioni di righe e colonne della matrice A in modo tale che il metodo di Jacobi applicato al sistema lineare $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove C è la matrice ottenuta da A dopo le permutazioni, sia convergente. Trovare le matrici P_1 e P_2 di permutazione tali che $C = P_1 A P_2$.

b) Stimare il numero di iterazioni del metodo di Jacobi in modo tale che l'errore si riduca di $1/1000$ rispetto all'errore iniziale utilizzando la norma infinito $\|\cdot\|_\infty$.

5) Sia $f \in C^3([-1,1])$, $p_2(x)$ il polinomio interpolatore nei nodi $-a, 0, a$, con $a \neq 0$. Maggiorare l'errore di interpolazione in modo indipendente da x ma il più accurato possibile (Nota: si supponga di conoscere le costanti M_i tali che $\|f^{(i)}\|_\infty \leq M_i, i = 0, 1, 2, 3, 3)$.