Cognome: ______________________ Nome: ______________________ Matricola: ____________

CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 28 gennaio 2016

1) Dati $n+1$ nodi equispaziati $x_j,\ j = 1, ..., n+1$ in $I = [-10, 10]$ e $n+1$ valori $y_j = f(x_j)$, con

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x^4},$$

i punti $z_i = -10 + ih$, $i = 0, ..., 100$, $h = 0.2$, si calcolino, per $n = 20, 40, 60$:

1.1) i valori assunti nei 101 nodi z_i dal polinomio di Lagrange P_n interpolante i dati $(x_j, y_j),\ j = 0, ..., n$;

2.1) i valori assunti nei 101 nodi z_i dalla spline lineare S_n interpolante i dati $(x_j, y_j),\ j = 0, ..., n$;

Si riportino nella tabella gli seguenti errori:

$$e_L = \max_{i=0,...,100} |P_n(z_i) - f(z_i)|,\ e_S = \max_{i=0,...,100} |S_n(z_i) - f(z_i)|,\ .$$

n	e_P	e_S
20		
40		
60		

2) Data la matrice A matrice 8×8:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

calcolare il numero di condizionamento di A in norma 1 e in norma 2.

Successivamente, per ogni $k = 3, ..., 8$, detta A_k la sottomatrice principale formata dalle prime k righe e dalle prime k colonne di A, si calcoli la fattorizzazione $A_k = L_k U_k$ e, senza utilizzare il comando MATLAB `det`, si calcoli il determinante d_k di A_k. Calcolare la media aritmetica

$$D = \frac{1}{6} \sum_{k=3}^{8} d_k.$$

RISULTATI

$K_1(A)$= $K_2(A)$= d_8= $D =$

3) Sia

$$I = \int_a^b \sqrt{|x-1|}\, dx = \frac{2}{3}\left(1 + \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^3}\right),$$

con $a = 0, b = 7/3$.

- Si approssimi numericamente I con il metodo dei trapezi compositi, utilizzando successivamente $M = [10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5]$ sottointervalli di uguale ampiezza su $[a, b]$. Si deduca l'ordine di convergenza del metodo, servendosi eventualmente di un grafico in scala logaritmica dell'errore in funzione del numero di sottointervalli. Si giustifichi il risultato trovato sulla base della stima teorica dell'errore per il metodo dei trapezi
- Sulla base delle considerazioni tratte al punto precedente, si scelga un punto $c \in (a, b)$ che permetta di migliorare le prestazioni del metodo dei trapezi composito per il calcolo di I. In particolare, si approssimi I utilizzando $N = M/2$ sottointervalli di uguale ampiezza su $[a, c]$ e altri N su $[c, b]$. Si deduca nuovamente l'ordine di convergenza del metodo dei trapezi in questa situazione

RISULTATI

ordine convergenza trapezi composito per approssimare I:
spiegazione:

ordine convergenza con introduzione punto c