1) Applicare il metodo di Newton all'equazione non lineare $f(x) \equiv x^2(x-3) = 0$, e, dopo avere espresso il metodo di Newton nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$, discuterne la convergenza e l'ordine al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$.

Commentare i risultati ottenuti.

MI 18-1-2016 2^ itinere

$f(x) = x^2(x-3) = 0$ $\alpha = 0$ molteplicità 2 $\beta = 3$ molt. 1

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad g(x) = x - \frac{x^3 - 3x^2}{3x^2 - 6x} = x - \frac{x^2 - 3x}{3x - 6} =$$

$$\frac{3x^2 - 6x - x^2 + 3x}{3x - 6} = \frac{2x^2 - 3x}{3(x-2)}$$

C.E. $x \neq 2$

$g(0) = 0$ $g(3) = 3$ $g\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

AS. OBLIQUO

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{3} \qquad q = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x}{3x - 6} - \frac{2}{3}x = \lim \frac{\cancel{2x^2} - 3x - \cancel{2x^2} + 4x}{3(x-2)} = \frac{1}{3}$$

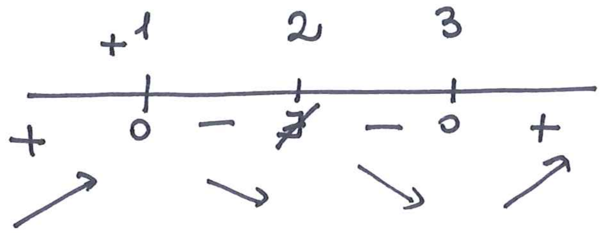
$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ AS. VERT $x = 2$

$$g'(x) = \frac{1}{3} \frac{(4x-3)(x-2) - 2x^2 + 3x}{(x-2)^2} = \frac{1}{3} \frac{4x^2 - \cancel{3x} - 8x + 6 - 2x^2 + \cancel{3x}}{(x-2)^2} =$$

$$\frac{1}{3} \frac{2x^2 - 8x + 6}{(x-2)^2} = \frac{2}{3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$$

$N \geq 0$ $x \leq 1 \cup x \geq 2$

$D > 0$ $x \neq 2$

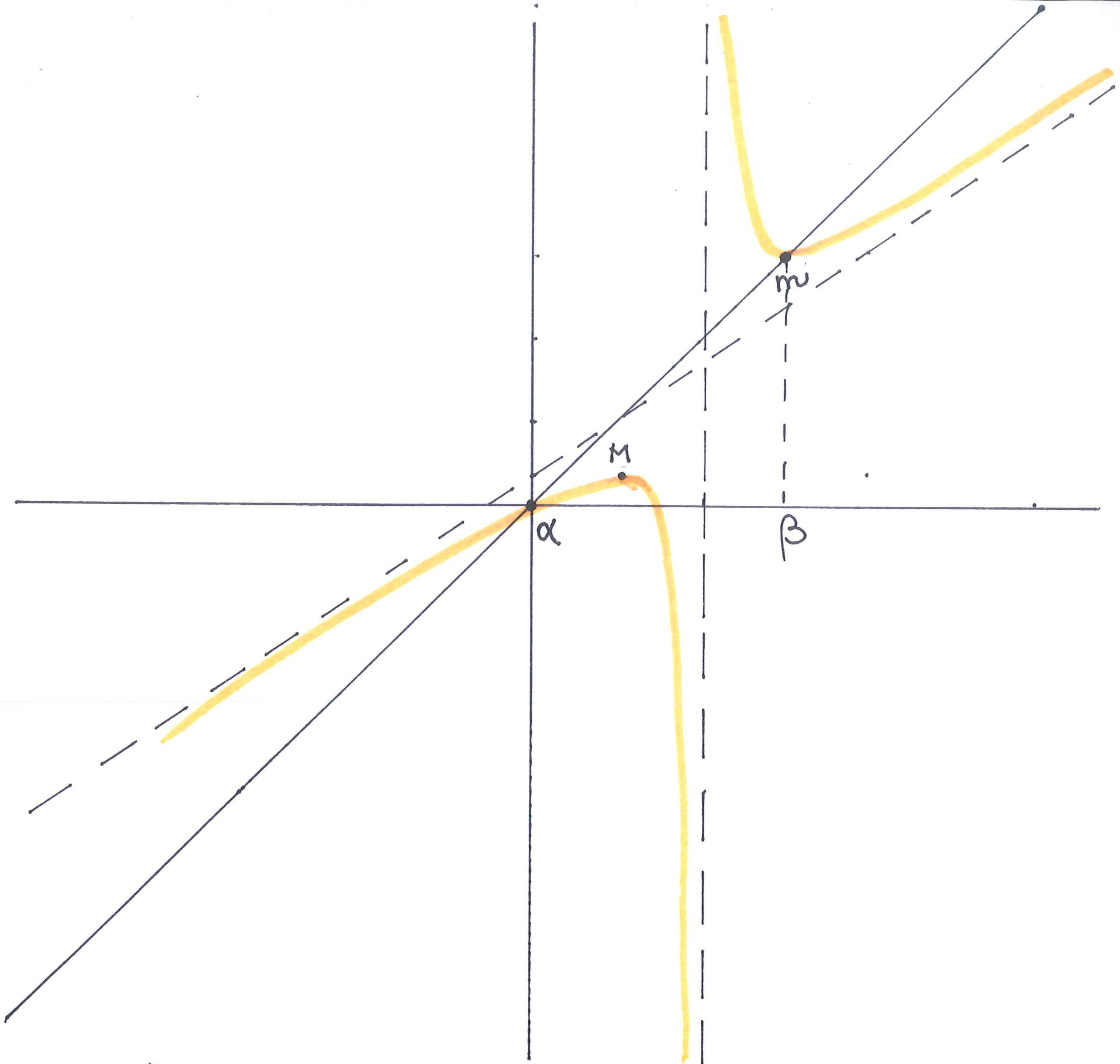


$M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ $m(3; 3)$ $g'(0) = \frac{2}{3} \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ 1^ ordine

$g'(3) = 0$

$$g'(x) = \frac{2}{3} \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x + 4} - \frac{1}{(x-2)^2}\right) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{(x-2)^2}\right)$$

$$g''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{(x-2)^3} \qquad g''(x) \neq 0 \quad \left[g''(3) = \frac{4}{3} \neq 0 \quad 2\text{^ ordine}\right]$$



Studio della convergenza

1) $x_0 < \alpha$: succ. mon. cresc. lim. sup. conv. ad α: $x_n \nearrow \alpha$

2) $\alpha < x_0 < 1$ " " decr. " inf conv. ad α: $x_n \searrow \alpha$

3) $1 < x_0 < \frac{3}{2}$ $x_1 \in (0, \frac{1}{3})$ caso 2

4) $x_0 = \frac{3}{2}$ $x_1 = \alpha$

5) $x_0 \in (\frac{3}{2}, 2)$ $x_1 < \alpha$: caso 1

6) $x_0 \in (2, \beta)$ $x_1 > \beta$: caso 7

7) $x_0 > \beta$ succ. mon. decr. lim. inf da β : $x_n \searrow \beta$

2) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \alpha & \alpha \\ 0 & \beta & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & \dots & 0 & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta & \alpha \\ \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

HI 18-1-16
2^ itinere

Si determini per quali valori dei parametri reali α e β è possibile procedere con il metodo di eliminazione di Gauss senza pivoting. Per tali valori trovare le matrici L, U della fattorizzazione $A = LU$ (con elementi della diagonale principale della matrice L uguali ad uno). Sfruttando tale decomposizione calcolare il determinante della matrice A.

$\alpha \neq 0$ $[\beta = 0 \quad L = I \quad U = A \quad \det A = 0]$

Calcolo solo i moltiplicatori non nulli 1° passo k=1→k=2

$m_{n1} = \frac{\beta}{\alpha} \qquad a^{(2)}_{n2} = -\frac{\beta}{\alpha}\cdot\alpha = -\beta \quad \dots\dots \quad a_{nn}$

$a^{(2)}_{nj} = -\beta \qquad j = 2, \dots, n-1$

$a^{(2)}_{nn} = \alpha - \frac{\beta}{\alpha}\cdot\alpha = \alpha - \beta$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} & & & & & \\ 0 & \beta & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & -\beta & -\beta & & -\beta & \alpha-\beta \end{bmatrix}$$

$m_{n2} = -1$

$a^{(3)}_{nn} = \alpha - \beta + \alpha = 2\alpha - \beta$

$a^{(3)}_{nj} = -\beta \quad j = 3, \dots, n-1$ invariati

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & \beta & \dots & \alpha \\ & & & & \\ & & -\beta & \dots & 2\alpha-\beta \end{bmatrix}$$

$m_{n3} = -1$

$a^{(4)}_{nn} = 2\alpha - \beta + \alpha = 3\alpha - \beta$

$a^{(4)}_{nj} = -\beta \quad j = 4, \dots, n-1$ invariati

$\vdots$

$$U = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \dots & \dots & \alpha \\ 0 & \beta & \dots & \dots & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & \dots & \alpha \\ & & & \ddots & \\ & & & & (n-1)\alpha - \beta \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -\frac{\beta}{\alpha} & -1 & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \alpha \cdot \beta^{n-2}\left((n-1)\alpha - \beta\right)$$

3) Dato $f(x) = e^x(2x-1)$ dimostrare che il metodo di Newton converge all'unica radice α per ogni scelta del valore iniziale $x_0 \in [0,3]$.

Dato il metodo iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{m}, \quad k \geq 0; \; x_0 \text{ dato}, \; m \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

determinare m in modo che il metodo risulti del secondo ordine per l'approssimazione di α.

$f(0) = -1 < 0$ $\qquad$ $f \in C^2[0,3]$ vero $\qquad$ Radice $\alpha = \frac{1}{2}$

$f(3) = 5e^3 > 0$

$f'(x) = e^x(2x-1) + e^x(2) = e^x(2x+1) > 0 \quad x \in [0,3]$

$f''(x) = e^x(2x+3) > 0 \quad x \in [0,3]$

$f'(0) = 1$ $\qquad$ $f'(3) = e^3 \cdot 7$

$\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right| = 1 < 3$ $\qquad$ $\left|\frac{f(3)}{f'(3)}\right| = \frac{5e^3}{7e^3} = \frac{5}{7} < 3$

$g(x) = x - \frac{f(x)}{m} = x - \frac{e^x(2x-1)}{m} = 1 - \frac{2xe^x - e^x}{m}$

$g'(x) = 1 - \frac{2e^x + 2xe^x - e^x}{m} = 1 - \frac{e^x + 2xe^x}{m}$

$g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{e^{1/2} + e^{1/2}}{m} = 0 \qquad m = 2\sqrt{e}$

4) Siano assegnati il vettore $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^4$ e la matrice C

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

a) Stabilire se il metodo iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}$ è convergente.

a) Verificare che il metodo di Jacobi applicato al sistema lineare $(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d}$ non è convergente ma esiste una permutazione delle righe di tale sistema per cui il metodo di Jacobi diventa convergente.

a) Il metodo è convergente $\iff \rho(C) < 1$ $\quad \det(C - \lambda I) = 0$

$$\det\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5}-\lambda \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(\frac{1}{5}-\lambda\right)\left(\lambda^2 - \frac{1}{12}\right) - \left(\lambda^2 - \frac{1}{12}\right) =$$

$$\left(\lambda^2 - \frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}\lambda - \frac{1}{2}\lambda + \lambda^2 - 1\right) =$$

$$\left(\lambda^2 - \frac{1}{12}\right)\left(\lambda^2 - \frac{7}{10}\lambda - \frac{9}{10}\right) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad |\lambda_{1,2}| = \frac{1}{2\sqrt{3}} < 1$$

$$10\lambda^2 - 7\lambda - 9 = 0 \qquad \lambda_{3,4} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 360}}{20} = \frac{7 \pm \sqrt{409}}{20}$$

$$|\lambda_3| = \frac{-7 + \sqrt{409}}{20} < 1 \qquad |\lambda_4| = \frac{7 + \sqrt{409}}{20} > 1$$

non converge

b) $$I - C = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Calcolo autovalori matrice B_J

$$\det(\lambda D + L + U) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{4}{5}\lambda \end{bmatrix} =$$

$$\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{4}{5}\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{12}\right) - \left(\lambda^2 - \frac{1}{12}\right) = \left(\lambda^2 - \frac{1}{12}\right)\left(\frac{2}{5}\lambda^2 - 1\right) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$\rho(B_J) = \sqrt{\frac{5}{2}} > 1$ Il m.d. Jacobi non converge

$2^\wedge$ prova itinere
18-1-2016

5)

Determinare due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tali che A e B siano convergenti mentre AB no

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda(A) = \frac{1}{4}, 0$ $\qquad$ $\lambda(B) = \frac{1}{4}, 0$

$\rho(A) = \frac{1}{4} < 1$ $\qquad$ $\rho(B) = \frac{1}{4} < 1$

$$AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+\frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda(AB) = \frac{65}{16}, 0$ $\qquad$ $\rho(AB) = \frac{65}{16} > 1$