CALCOLO NUMERICO 1 (18 Gennaio 2016) - Seconda prova in itinere

COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

1) Applicare il metodo di Newton all'equazione non lineare $f(x) \equiv x^2(x-3) = 0$, e, dopo avere espresso il metodo di Newton nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$, discuterne la convergenza e l'ordine al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$.

   Commentare i risultati ottenuti.

2) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \alpha & \alpha \\ 0 & \beta & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & \dots & 0 & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta & \alpha \\ \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

   Si determini per quali valori dei parametri reali α e β è possibile procedere con il metodo di eliminazione di Gauss senza pivoting. Per tali valori trovare le matrici L, U della fattorizzazione $A = LU$ (con elementi della diagonale principale della matrice L uguali ad uno). Sfruttando tale decomposizione calcolare il determinante della matrice A.

3) Dato $f(x) = e^x(2x-1)$ dimostrare che il metodo di Newton converge all'unica radice α per ogni scelta del valore iniziale $x_0 \in [0, 3]$.

   Dato il metodo iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{m}, \ k \geq 0; \ x_0 \text{ dato}, \ m \in \mathbb{R} \backslash \{0\},$$

   determinare m in modo che il metodo risulti del secondo ordine per l'approssimazione di α.

4) Siano assegnati il vettore $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{\mathbf{4}}$ e la matrice C

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

   a) Stabilire se il metodo iterativo $\mathbf{x^{(k+1)}} = \mathbf{C}\mathbf{x^{(k)}} + \mathbf{d}$ è convergente.

   a) Verificare che il metodo di Jacobi applicato al sistema lineare $(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d}$ non è convergente ma esiste una permutazione delle righe di tale sistema per cui il metodo di Jacobi diventa convergente.

5) Determinare due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tali che A e B siano convergenti mentre AB no.