CALCOLO NUMERICO 1 (26 Gennaio 2017) - Prova scritta

COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

1) Determinare i parametri $B,\ D,\ b,\ d \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione

$$S(x) = \begin{cases} 1 + B(x-1) - D(x-1)^3 & 1 \le x < 2 \\ \\ 1 + b(x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + d(x-2)^3 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

sia una spline cubica sull'intervallo $[1,3]$ interpolante i dati $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,0)$. Dire se la spline trovata è naturale.

2) Assegnato l'intervallo $[a,b]$ e il punto medio $x_M = \frac{a+b}{2}$, trovare ω_0, ω_1 e ω_2 in modo tale che la formula di quadratura,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \omega_0 f(x_M) + \omega_1 f'(x_M) + \omega_2 f''(x_M)$$

abbia grado di precisione almeno 2.

3) Discutere la convergenza e l'ordine della famiglia di metodi iterativi definiti in funzione del parametro reale a:

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{3}(4 - a^3 x_k^3),\ \ k \ge 0,$$

al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$.

4) Dato un sistema lineare con matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} :$$

4.1) trovare per quali valori di a la matrice è definita positiva;

4.2) trovare per quali valori di a il metodo di Jacobi è convergente;

4.2) trovare l'espressione del numero di condizionamento di $K_2(A)$ in funzione di a.

5) Dato $h > 0$, indicare per quali valori di $\beta \in [0, 2h]$ esiste uno ed unico polinomio di terzo grado p_3 tale che

$$p_3(0) = f(0), \quad p_3(h) = f(h), \quad p_3(2h) = f(2h), \quad p_3'(\beta) = f'(\beta),$$

per ogni $f \in C^1([0, 2h])$.