Cognome: ______________________ Nome: ______________________ Matricola: ____________

CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 27 gennaio 2017

1) Si consideri la matrice A di dimensione $n \times n$, con $n = 40$ oppure $n = 80$ così definita:

$$A = \begin{pmatrix} n & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{3}{n} & \dots & \frac{n-3}{n} & \frac{n-2}{n} & \frac{n-1}{n} \\ \frac{1}{n} & 2n & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{3}{n} & \dots & \frac{n-3}{n} & \frac{n-2}{n} \\ \frac{2}{n} & \frac{1}{n} & 3n & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{3}{n} & \dots & \frac{n-3}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n-3}{n} & \dots & \frac{3}{n} & \frac{2}{n} & \frac{1}{n} & (n-2)n & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} \\ \frac{n-2}{n} & \frac{n-3}{n} & \dots & \frac{3}{n} & \frac{2}{n} & \frac{1}{n} & (n-1)n & \frac{1}{n} \\ \frac{n-1}{n} & \frac{n-2}{n} & \frac{n-3}{n} & \dots & \frac{3}{n} & \frac{2}{n} & \frac{1}{n} & n^2 \end{pmatrix}.$$

Costruire la matrice di iterazione B del metodo di Jacobi e verificare che B è una matrice convergente. A tale scopo si calcoli il raggio spettrale $\rho(B)$. Sapendo che vale la seguente proprietà:

$$\underbrace{I + B + B^2 + B^3 + ... + B^k}_{S_k} + ... = \underbrace{(I - B)^{-1}}_{Q},$$

trovare il minimo valore K per cui risulta $E_K \equiv \|S_K - Q\|_2 < 10^{-8}$.
[Per il calcolo della matrice $Q = (I - B)^{-1}$ si utilizzi il comando MATLAB `inv`].

RISULTATI

N	$\rho(B)$	K	E_K
40			
80			

2) Si consideri il problema dell'approssimazione dell'integrale definito

$$I = \int_0^\alpha \sqrt{|f(x)|}\, \mathrm{d}x, \ \ f(x) \equiv \cos(x) - x^2,$$

dove α è l'unica radice positiva della funzione f.

2.1) Approssimare α con il metodo di Newton applicato alla funzione f, utilizzando $x_0 = 1$ e test d'arresto $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-8}$. Sia `it` il numero di iterazioni eseguite e $x_{\texttt{it}}$ la corrispondente approssimazione di α.

2.1) Approssimare il valore di I con il metodo di Cavalieri-Simpson composito utilizzando $x_{\texttt{it}}$ al posto di α e suddividendo l'intervallo $[0, x_{\texttt{it}}]$ in 20 sottointervalli di uguale ampiezza. Sia I_C il valore trovato.

RISULTATI

`it` $=$ $\qquad$ $\mathtt{x}_{\mathtt{it}} =$ $\qquad$ $\mathtt{I}_{\mathtt{C}} =$

3) Sia $P_{20}(x)$ il polinomio definito come

$$P_{20}(x) = \prod_{k=1}^{20} (x-k),$$

le cui radici sono gli interi $k = 1, \ldots, 20$.

3.1) Si trovi con l'uso di opportuni comandi Matlab il coefficiente c_{19} del termine x^{19}.

3.2) Si consideri ora la famiglia di polinomi perturbati $\widehat{P}_{20}(x) = P_{20}(x) - \alpha x^{19}$, dove $\alpha = 2^{-t}$, $t = 23, \ldots, 28$. Si calcolino, al variare di α, le radici $\widehat{x}_k$, $k = 1, \ldots, 20$ del corrispondente polinomio perturbato e si riporti al variare di α la quantità $M(\alpha) = \max_{k=1,\ldots,20} |x_k - \widehat{x}_k|$ (si usi `format short e`).

3.3) Si valuti il condizionamento del calcolo della radice $k-$esima x_k, $k = 1, \ldots, 20$, del polinomio $P_{20}(x)$ rispetto al parametro α calcolando la quantità

$$\mathcal{K}_k = \frac{|x_k^{19}|}{|P'_{20}(x_k)|},$$

dove $P'_{20}(x)$ è la derivata prima di $P_{20}(x)$ rispetto a x valutata in $x = x_k$. Sia $\widehat{k}$ l'indice corrispondente alla radice per cui $\mathcal{K}_k$ è massimo. Si calcoli infine il rapporto R tra il massimo e il minimo valore di $\mathcal{K}_k$ per $k = 1, \ldots, 20$ (si usi `format short e`) e si commentino i risultati.

RISULTATI

$c_{19} =$

$M(\alpha = 2^{-23}) =$ $M(\alpha = 2^{-24}) =$ $M(\alpha = 2^{-25}) =$

$M(\alpha = 2^{-26}) =$ $M(\alpha = 2^{-27}) =$ $M(\alpha = 2^{-28}) =$

$\widehat{k} =$

$\mathcal{K}_{\widehat{k}} =$

$R =$

Commento.