1) Dato un sistema lineare con matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ \frac{\alpha}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

discutere la convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss Seidel al variare di α. Nel caso di convergenza stabilire la relazione tra le corrispondenti velocità asintotiche.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ \frac{\alpha}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Jacobi. $\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\alpha \\ \frac{\alpha}{2} & \lambda & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda^2) - \alpha\left(\frac{\alpha^2}{4}\right) = 0$

$$\lambda^3 - \frac{\alpha^3}{4} = 0 \qquad |\lambda| = \frac{|\alpha|}{\sqrt[3]{4}}$$

G. Seidel $\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\alpha \\ \frac{\alpha}{2}\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2}\lambda & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \lambda^2 - \alpha \cdot \frac{\alpha^2 \lambda^2}{4} = 0$

$$\lambda^3 - \frac{\alpha^3}{4}\lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2\left(\lambda - \frac{\alpha^3}{4}\right) = 0$$

$\rho(B_J) = \frac{|\alpha|}{\sqrt[3]{4}} \qquad \rho(B_{GS}) = \frac{|\alpha|^3}{4} \qquad$ CNS $\quad |\alpha| < \sqrt[3]{4}$

$$R(B_{GS}) = -\ln \frac{|\alpha|^3}{4} = 3\left[-\ln \frac{|\alpha|}{\sqrt[3]{4}}\right] = 3\,R(B_J)$$

Vel. as. (GS.) = Triplo Vel. as. (J)

2) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

di dimensione n, con n numero intero positivo pari.

2.1) Calcolare $\det A$.

2.2) Trovare le matrici L e U della fattorizzazione $A = LU$ (senza applicare la tecnica del pivoting) e rappresentare graficamente la quantità $\|U\|_\infty$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

$$\det A = 1 \cdot \det A(2:n, 2:n) - a \det A(2:n, 1:n-1) =$$

$$1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 - a \underbrace{(-1)(-1)\cdots(-1)}_{n-1} = 1 + a$$

$(\det A \neq 0 \qquad a \neq -1)$

1) $m_{21} = -1 \qquad a_{22} = 1 \; ; \; a_{2j} = 0 \quad (j = 3, \dots, n-1), \; a_{2n} = a$

$m_{31} = 0 \qquad m_{41} = 0 \quad \dots \quad m_{n1} = 0$

2) Sottomatrice $\quad i, j = 2:n$

$$\begin{array}{cc} & R_1 \\ C_1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

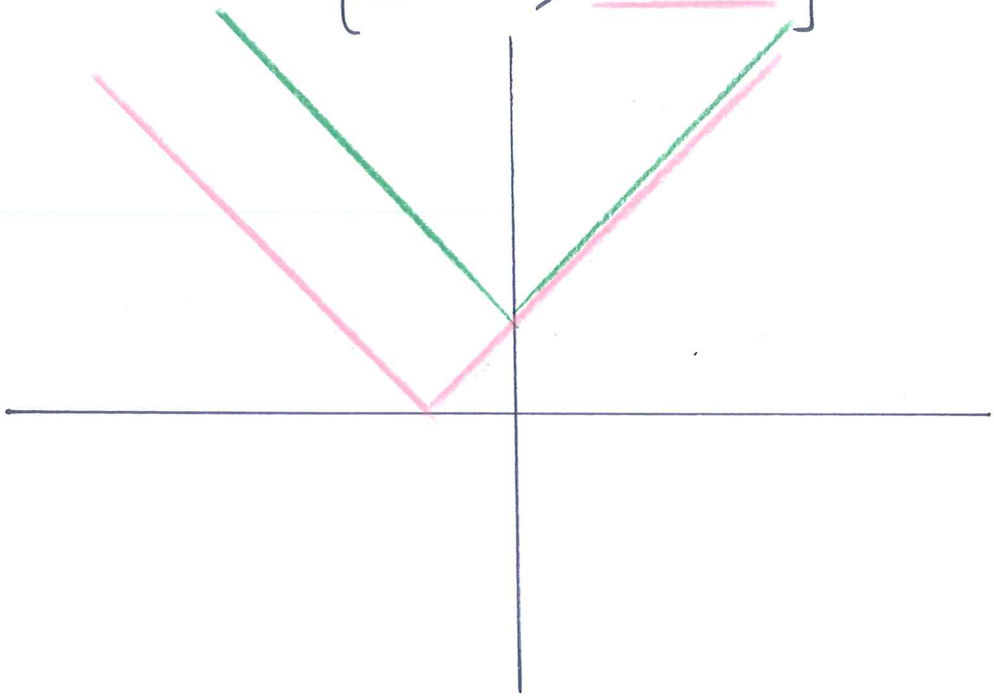
$m_{32} = -1 \quad a_{33} = 1 ; \; a_{3j} = 0 \quad (j = 4, \dots, n-1) \quad a_{3n} = a$

$\vdots$

$$\boxed{\begin{matrix} 1 & a \\ -1 & 1 \end{matrix}} \qquad m_{n,n-1} = -1 \qquad a_{nn} = 1 + a$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & 0 & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & a \\ & 1 & & & a \\ & & 1 & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & a \\ & & & & 1+a \end{bmatrix}$$

$$\|U\|_\infty = \max \left\{ \underline{1+|a|}; \underline{|1+a|} \right\} = 1+|a|$$



3) Dato il metodo iterativo

$$x_{n+1} = g(x_n),\ n \geq 0,\ g(x) = k\Big(\frac{3x - x^2}{3 + x^2}\Big),\ k \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

3.1) nel caso $k = 1$ trovare i punti fissi della funzione g e dimostrare che il metodo iterativo converge alla radice minore per ogni scelta di x_0 in un suo opportuno intorno.

3.2) nel caso $k = 2$ discutere la convergenza e l'ordine del metodo iterativo al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$.

$K = 1 \qquad g(x) = \dfrac{3x - x^2}{3 + x^2}$

$$\frac{3x - x^2}{3 + x^2} = x$$

$$\cancel{3x} - x^2 = \cancel{3x} + x^3$$

$$x^3 + x^2 = 0 \qquad x^2 = 0 \quad x = -1$$

$$g'(x) = \frac{(3 - 2x)(3 + x^2) - (3x - x^2)\cdot 2x}{(3 + x^2)^2} =$$

$$\frac{9 - 6x + 3x^2 - \cancel{2x^3} - 6x^2 + \cancel{2x^3}}{(3 + x^2)^2} = \frac{-3x^2 - 6x + 9}{(3 + x^2)^2} =$$

$$-3\,\frac{x^2 + 2x - 3}{(x^2 + 3)^2}$$

$$g'(-1) = -3\,\frac{1 - 2 - 3}{(1 + 3)^2} = -3 \cdot \frac{-4}{16} = \frac{3}{4} < 1$$

c suff. $\Rightarrow$ $\exists\, I(-1)$ t.c. il met. conv. a -1 $\forall x_0 \in I(-1)$

$g'(0) = -3\,\dfrac{-3}{9} = 1$ Non si può dedurre il comportamento delle iterate per $x_0 \in I(0)$

$$g(x) = 2 \cdot \frac{3x - x^2}{3 + x^2} = \frac{-2x^2 + 6x}{x^2 + 3}$$

$g(x) = 0$

$x = 0 \vee x = 3$

Punti fissi

$$2 \cdot \frac{3x - x^2}{3 + x^2} = x$$

$$6x - 2x^2 = 3x + x^3$$

$$x^3 + 2x^2 - 3x = 0$$

$$x(x^2 + 2x - 3) = 0$$

$$x(x+3)(x-1) = 0$$

$x = -3 \quad (\alpha)$

$x = 0 \quad (\beta)$

$x = 1 \quad (\gamma)$

Asintoti $\quad y = -2$

$$g' = 2 \cdot (-3) \frac{x^2 + 2x - 3}{(x^2+3)^2} = -6 \cdot \frac{(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2} > 0$$

$$-3 < x < 1$$

	-3		1	
$-$		$+$		$-$
$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$m\,(-3; -3) \qquad M\,(1; 1)$

$g'(-3) = 0 \quad (g''(-3) \neq 0) \quad$ 2^ ordine

$g'(1) = 0 \quad (g''(1) \neq 0) \quad$ 2^ ordine

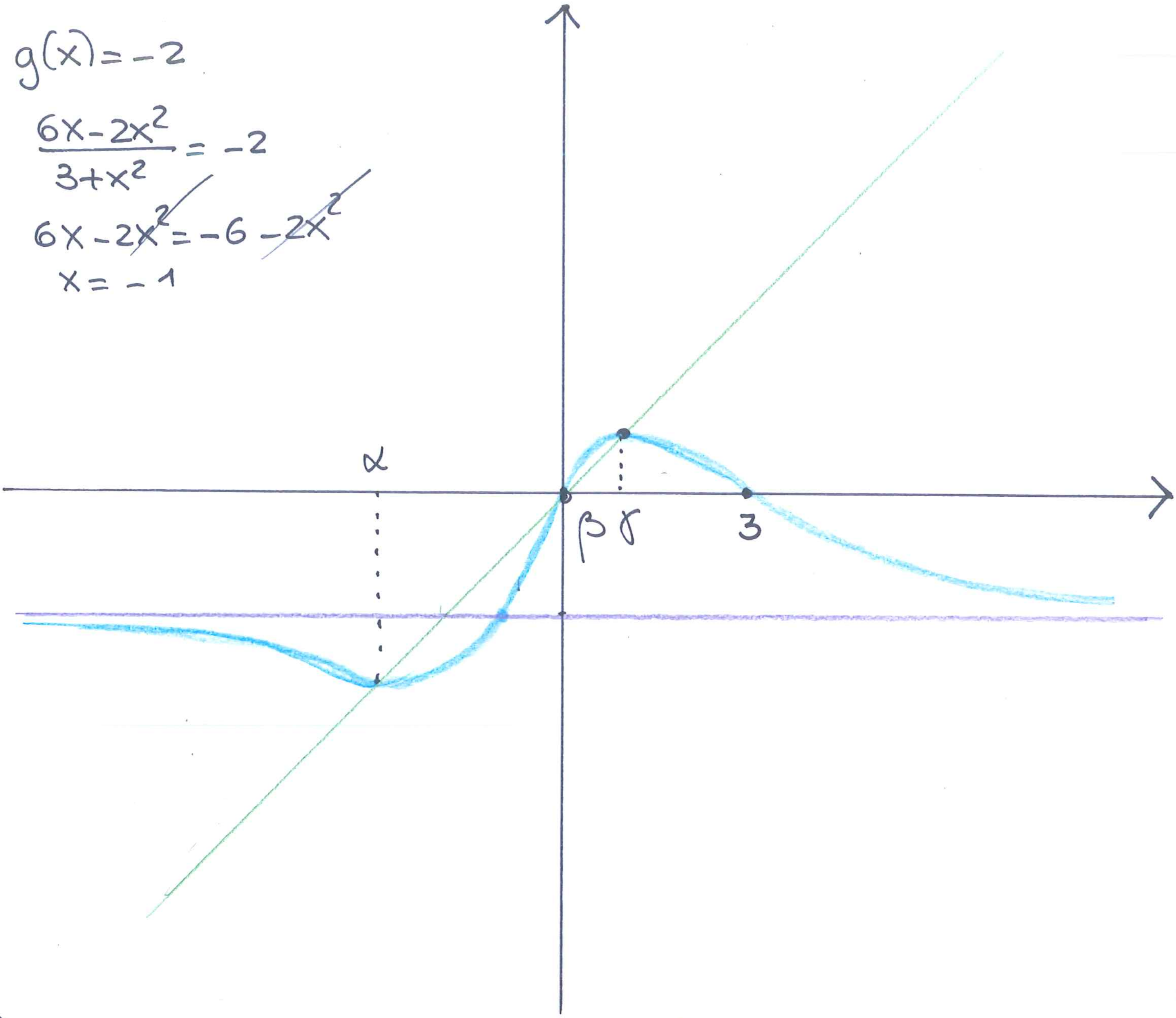
$g'(0) = -6 \, \frac{-3}{9} = 2 > 1 \quad$ divergenza locale

$g(x) = -2$

$\dfrac{6x-2x^2}{3+x^2} = -2$

$6x - \cancel{2x^2} = -6 - \cancel{2x^2}$

$x = -1$



1) $x_0 < \alpha$ $\quad \alpha < x_1 < -2$ vedi caso 2)

2) $\alpha < x_0 < \beta$ $\quad$ succ. mon. decr. lim inf da α : $x_n \searrow \alpha$

3) $\beta < x_0 < \gamma$ $\quad$ " " cresc " sup da γ: $x_n \nearrow \gamma$

4) $\gamma < x_0 < 3$ $\quad \beta < x_1 < \gamma$ vedi caso 3

5) $x_0 > 3$ $\quad -2 < x_1 < \beta$ vedi caso 2

$x_0 < \beta \qquad x_n \to \alpha$

$\beta < x_0 < 3 \qquad x_n \to \gamma$

$x_0 > 3 \qquad x_n \to \alpha$

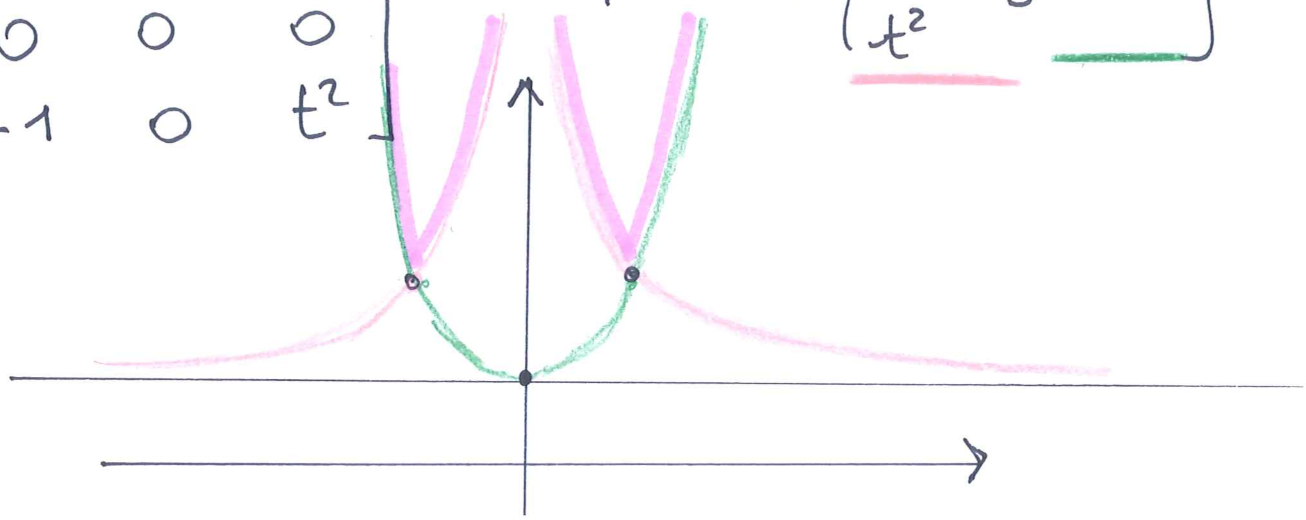
4) Dato il vettore $\mathbf{x} = [\frac{1}{t},\ 0,\ -t]$, $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, e la matrice $A = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$, determinare t in modo che la quantità $\|A\|_1$ risulti minima.

$$x = \left[\frac{1}{t}, 0, -t\right] \quad t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$A = x^T x$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{t} \\ 0 \\ -t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & 0 & -t \end{bmatrix} \qquad (3,1)(1,3) \rightarrow (3,3)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{t^2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & t^2 \end{bmatrix} \qquad \|A\|_1 = \max\left\{\frac{1}{t^2}+1,\ 1+t^2\right\}$$



$$\|A\|_1 = \begin{cases} \frac{1}{t^2}+1 & |t|<1 \wedge t \neq 0 \\ 1+t^2 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

$$\min_{t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} \|A\|_1 = 2, \quad \text{per } t = \pm 1$$

5) Data l'equazione non lineare $3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 1 = 0$ verificare che ha una radice reale α di molteplicit 1 e una radice reale β di molteplicit 3 e discutere la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazine di α e β.

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 1 = (x-1)^3(3x+1)$$

$$3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 1 = 0$$

$P(1) = 0$

	3	-8	6	0	-1
1		1	-5	1	1
	3	-5	1	1	//
1		3	-2	-1	
	3	-2	-1	//	
1		3	1		
	3	1	//		

$(x-1)^3(3x+1) = 0$ $\quad x = 1 \quad \beta = 1 \quad$ molt $= 3$

$x = \frac{1}{3} \quad \alpha = -\frac{1}{3} \quad$ molt. 1

Ricerca di α e β

$$f'(x) = 3(x-1)^2(3x+1) + (x-1)^3 \cdot 3 = (x-1)^2(9x+3+3x-3)$$
$$= (x-1)^2 \cdot 12x \qquad \beta = 1 \quad \text{molt} = 2$$

Metodo di Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ordine 2 per approx di α

" 1 " di β

$$x_{n+1} = x_n - 3\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ha ordine 2 per approx di β