CALCOLO NUMERICO 1 (19 Gennaio 2017) - Seconda prova in itinere

COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

1) Dato un sistema lineare con matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ \frac{\alpha}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

discutere la convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss Seidel al variare di α. Nel caso di convergenza stabilire la relazione tra le corrispondenti velocità asintotiche.

2) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R},$$

di dimensione n, con n numero intero positivo pari.

2.1) Calcolare $\det A$.

2.2) Trovare le matrici L e U della fattorizzazione $A = LU$ (senza applicare la tecnica del pivoting) e rappresentare graficamente la quantità $\|U\|_\infty$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

3) Dato il metodo iterativo

$$x_{n+1} = g(x_n), \ n \geq 0, \ g(x) = k\Big(\frac{3x - x^2}{3 + x^2}\Big), \ k \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

3.1) nel caso $k = 1$ trovare i punti fissi della funzione g e dimostrare che il metodo iterativo converge alla radice minore per ogni scelta di x_0 in un suo opportuno intorno.

3.2) nel caso $k = 2$ discutere la convergenza e l'ordine del metodo iterativo al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$.

4) Dato il vettore $\mathbf{x} = [\frac{1}{t}, \ 0, \ -t], \ t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, e la matrice $A = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$, determinare t in modo che la quantità $\|A\|_1$ risulti minima.

5) Data l'equazione non lineare $3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 1 = 0$ verificare che ha una radice reale α di molteplicità 1 e una radice reale β di molteplicità 3 e discutere la convergenza del metodo di Newton per l'approssimazione di α e β.