**CALCOLO NUMERICO 1** (31 Gennaio 2018) - Prova scritta

**COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE**

1) Sia data una formula di quadratura

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx \alpha_1 f(-a) + \alpha_2 f(0) + \alpha_3 f(a), \quad 0 < a < 2$$

1.1) Determinare i pesi $\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$ in funzione di $a$ in modo che il grado di precisione sia almeno 2.

1.2) Calcolare il grado di precisione della formula ottenuta.

1.3) Generalizzare la formula all'intervallo $[-b, b]$, $b > 0$.

1)

$k=0 \quad f(x)=1$

$$\int_{-2}^{2} 1\,dx = 4 \qquad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=4$$

$k=1 \quad f(x)=x$

$$\int_{-2}^{2} x\,dx = 0 \qquad -\alpha_1 a + \alpha_3 a = 0 \qquad \alpha_1=\alpha_3$$

$k=2 \quad f(x)=x^2$

$$\int_{-2}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = \frac{16}{3} \qquad \alpha_1 a^2 + \alpha_3 a^2 = \frac{16}{3} \qquad \alpha_1=\alpha_3=\frac{8}{3a^2}$$

$$\alpha_2 = 4 - 2\cdot\frac{8}{3a^2} = 4 - \frac{16}{3a^2}$$

2)

$k=3 \quad f(x)=x^3$

$$\int_{-2}^{2} x^3 dx = 0 \qquad \frac{8}{3a^2}(-a^3) + \frac{8}{3a^2}\cdot a^3 = 0.$$

$k=4 \quad f(x)=x^4$ G.P. 4 se

$$\int_{-2}^{2} x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-2}^{2} = \frac{64}{5} \qquad \frac{8}{3a^2}\cdot a^4\cdot 2 = \frac{16}{3}a^2 \qquad \frac{16}{3}a^2 = \frac{64}{5} \quad a^2 = \frac{12}{5}$$

$a = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ $\Rightarrow$ formula di Gauss-Legendre su $[-2,2]$

$r = 5$ $\quad f(x) = x^5$

$$\int_{-2}^{2} x^5 \, dx = 0 \qquad \frac{8}{3a^2} \cdot (-a^5) + \frac{8}{3a^2} \cdot a^5 = 0 \quad \forall a$$

$r = 6$ $\quad \int_{-2}^{2} x^6 \, dx \neq F.Q(x^6)$

perché il max G.P. è $2 \cdot 3 - 1 = 5$

---

$$\int_{-b}^{b} f(x) \, dx$$

. . . . . . .

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2b$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{8b}{3a^2}$

$\alpha_2 = 2b - \frac{16b}{3a^2}$

2) Si verifichi che la funzione $f(x) = x - e^{x/2} + 3$, $x \in I = [-5, 5]$ ha due zeri $\alpha < 0$ e $\beta > 0$. Si studi la convergenza e l'ordine dei metodi di punto fisso

$$x^{k+1} = g(x^k),\ k \geq 0,\ x_0 \in I,$$

con $g(x) = e^{x/2} - 3$ e $g(x) = 2\ln(x+3)$.

MILANO 31/01/18

$f(x) = x - e^{\frac{x}{2}} + 3$

| $x$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-2.0821$ | $-1.13$ | $-0.22$ | $0.63$ | $1.39$ | $2$ |

| $x$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2.35$ | $2.28$ | $1.51$ | $-0.39$ | $-4.18$ |

$\alpha \in (-3; -2)$

$\beta \in (3; 4)$

$x - e^{\frac{x}{2}} + 3 = 0 \qquad x = e^{\frac{x}{2}} - 3$

$e^{\frac{x}{2}} = x + 3 \qquad x = 2\ln(x+3) \quad x > -3$

1) $g(x) = e^{\frac{x}{2}} - 3$

$g'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$

$g'(-3) = 0.1116$

$g'(-2) = 0.1839$

$0.1116 < g'(\alpha) < 0.1839$

$\Downarrow$

convergenza ad $\alpha$ 1^ordine

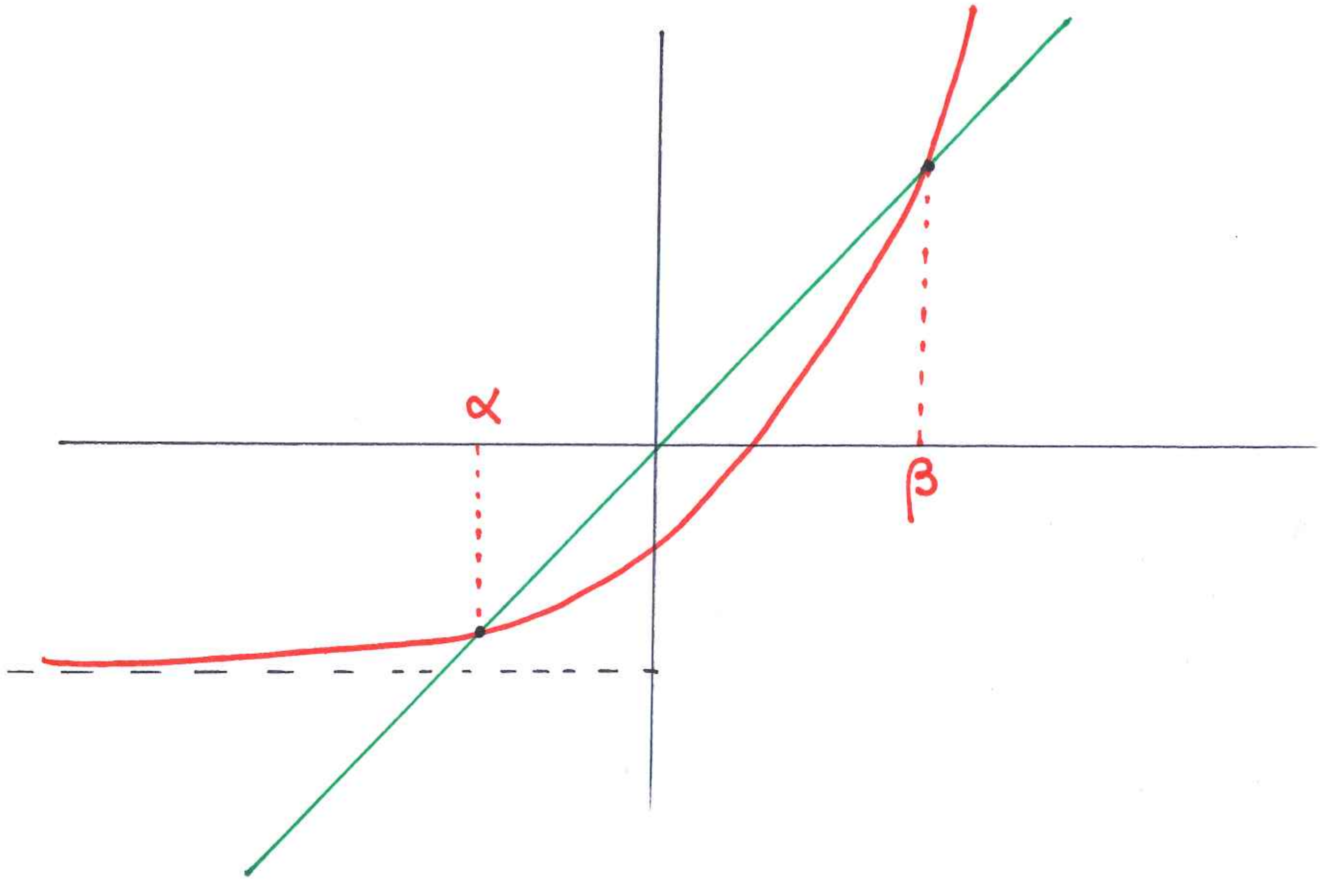
$g'(3) = 2.24$

$g'(4) = 3.69$

$2.24 < g'(\beta) < 3.69$

$\Downarrow$

divergenza locale




$x_0 < \alpha$ succ. mon. cresc. lim. sup. da $\alpha \Rightarrow x_n \nearrow \alpha$

$\alpha < x_0 < \beta$ " " decr. " inf. da $\alpha \Rightarrow x_n \searrow \alpha$

$x_0 > \beta$ " " cresc. ill. sup $\Rightarrow x_n \nearrow +\infty$

$x_0 = \alpha$ "$x_n = \alpha$" $\forall n$ ; $x_0 = \beta$, "$x_n = \beta$" $\forall n$.

2) $g(x) = 2\ln(x+3)$ C.E. $x > -3$

$g'(x) = \dfrac{2}{x+3}$

$\lim_{x \to -3^+} g'(x) = +\infty$ $g'(-2) = 2$ $g'(\alpha) > 2$

$\Downarrow$

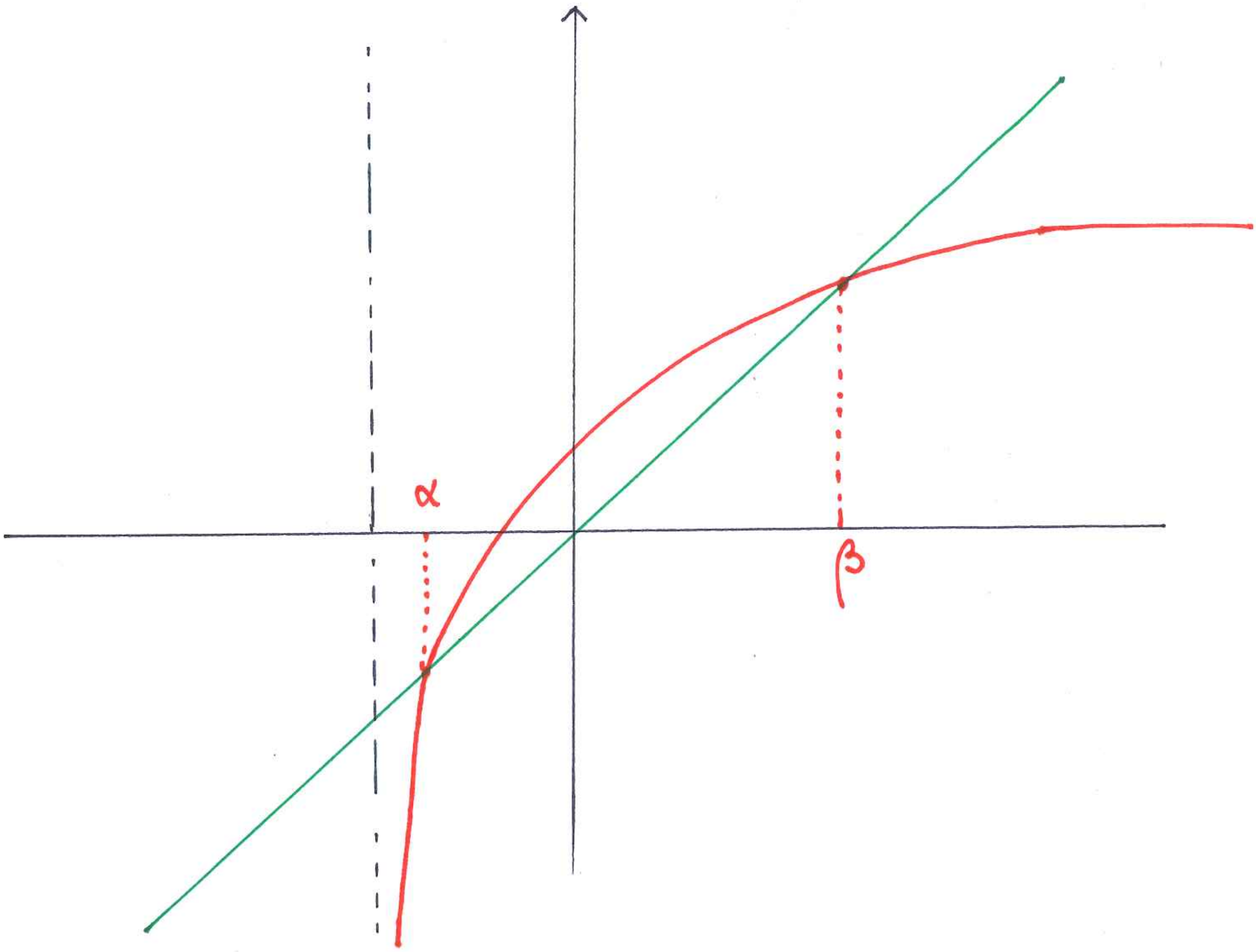
divergenza locale

$g'(3) = \frac{1}{3}$

$g'(4) = \frac{2}{7}$

$\frac{2}{7} < g'(\beta) < \frac{1}{3} \Rightarrow$ convergenza a $\beta$

1^ ordine




$x_0 < \alpha$ $\exists \bar{n}$ t.c. $x_{\bar{n}} < -3$ STOP

$\alpha < x_0 < \beta$ succ. mon. cresc. lim. sup. da $\beta$: $x_n \nearrow \beta$

$x_0 > \beta$ " " decr. " inf. da $\beta$ $x_n \searrow \beta$

$x_0 = \alpha$ "$x_n = \alpha$" $\forall n$

$x_0 = \beta$ "$x_n = \beta$" $\forall n$

3) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & a & -a \\ a & 4 & 0 \\ -a & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

determinare tutti e soli i valori di $a$ per i quali:

3.1) $A$ è diagonalmente dominante;

3.2) $A$ è definita positiva.

Rappresentare graficamente le quantità $\|A\|_1$ e $\|A\|_2$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

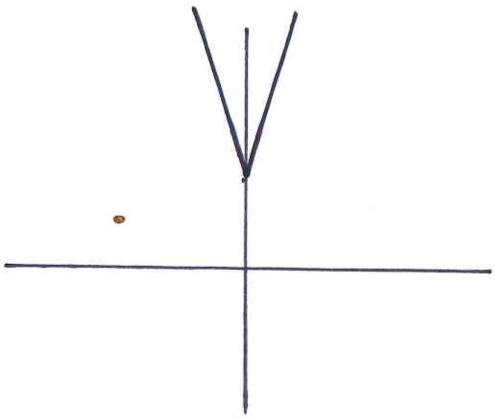
Milano 31/01/18

3.1) $\begin{cases} 4 > 2|a| \\ 4 > |a| \\ 4 > |a| \end{cases}$ $\quad |a| < 2$

3.2) $\begin{cases} 4 > 0 \\ 16 - a^2 > 0 \\ -a(4a) + 4(16 - a^2) > 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \text{—} \\ |a| < 4 \\ -a^2 + 16 - a^2 > 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \text{—} \\ \text{—} \\ a^2 < 8 \end{cases}$

D.P. $\quad |a| < 2\sqrt{2}$

$\|A\|_1 = \max\{4 + 2|a|, 4 + |a|\} = 4 + 2|a|$



$\|A\|_2 = \max |\lambda(A)| \quad$ (A è simmetrica)

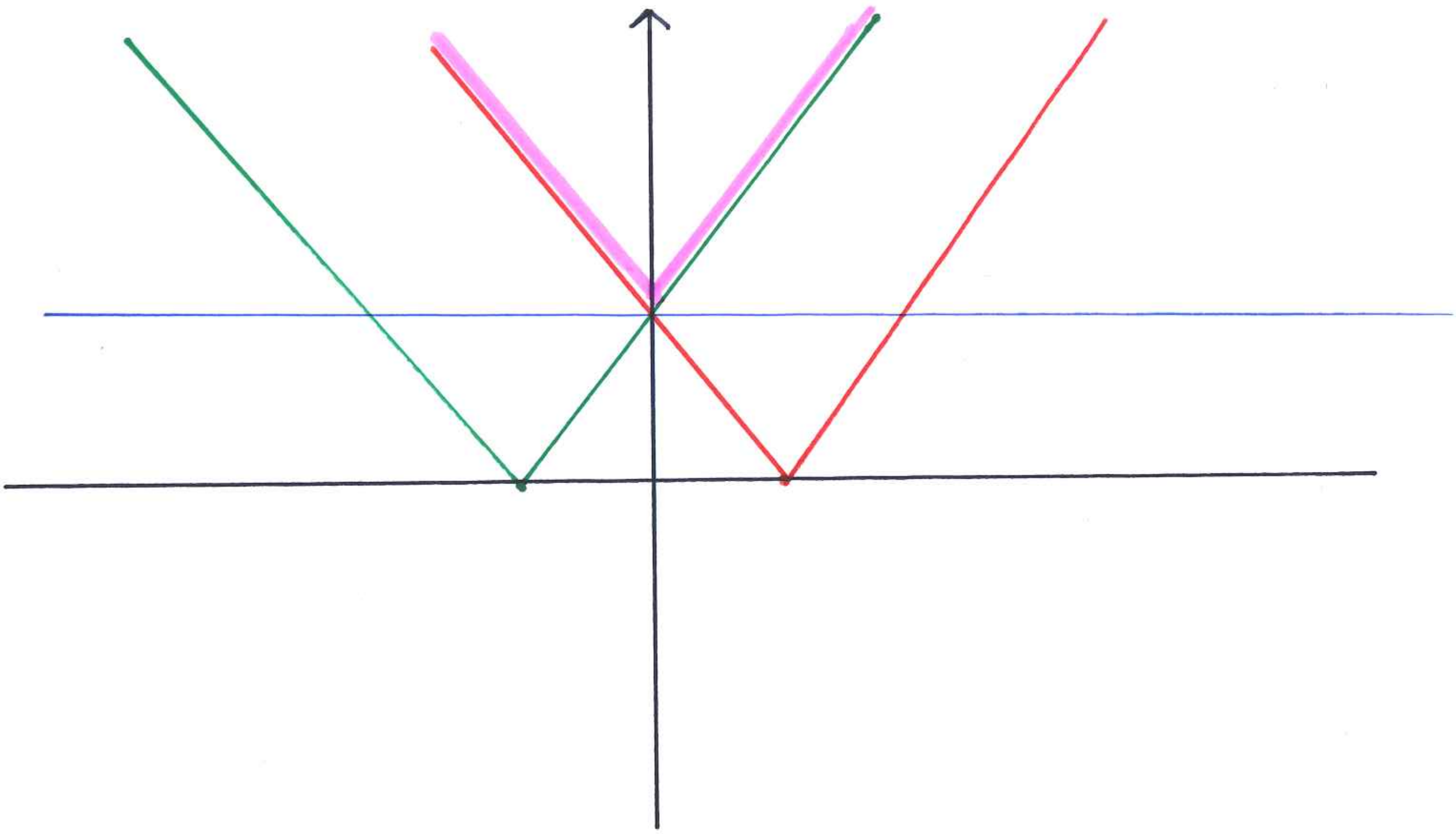
$$\det \begin{vmatrix} 4-\lambda & a & -a \\ a & 4-\lambda & 0 \\ -a & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -a \cdot a(4-\lambda) + (4-\lambda)\left[(4-\lambda)^2 - a^2\right] = 0$$

$(4-\lambda)\left[-a^2 + (4-\lambda)^2 - a^2\right] = 0$

$4 - \lambda = 0 \quad \lambda = 4$

$(4-\lambda)^2 = 2a^2 \quad\quad \lambda - 4 = \pm\sqrt{2}a \quad\quad \rho(A) = \max\{4, |4 - \sqrt{2}a|, |4 + \sqrt{2}a|\}$

$\lambda = 4 \pm \sqrt{2}a$



MILANO 31/01/18

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{3,1},$$

4.1) Trovare una permutazione di righe per cui il metodo di Jacobi applicato al sistema lineare risulti convergente.

4.2) Trovare il numero di iterazioni necessarie per ridurre l'errore di 1/1000 rispetto all'errore della approssimazione iniziale in norma $\|\cdot\|_\infty$.

4.3) Studiare la convergenza del metodo di Gauss Seidel per il sistema ottenuto al punto 4.1).

4.4) Stabilire la relazione fra le velocità asintotiche di convergenza dei due metodi.

4.1) Per esempio: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A$ diag. dom.

$$\|x - x^{(k)}\|_\infty \leq \|B\|_\infty \cdot \|x - x^{(k-1)}\|_\infty \leq \dots \leq \|B\|_\infty^k \cdot \|x - x_0\|$$

$$\|B\|_\infty^k < \frac{1}{1000}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|B\|_\infty = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^k < \frac{1}{1000} \qquad k > \frac{\ln \frac{1}{1000}}{\ln \frac{3}{4}} \approx 24{,}0118$$

$$\bar{k} = 25$$

Calcolo $\rho(B_{GS})$

$$\det\begin{bmatrix} 3\lambda & 0 & 2 \\ \lambda & 4\lambda & 2 \\ \lambda & 2\lambda & 4\lambda \end{bmatrix} = 3\lambda\left(16\lambda^2-4\lambda\right)+2\left(2\lambda^2-4\lambda^2\right)=0$$

$$48\lambda^3-12\lambda^2-4\lambda^2=0$$

$$48\lambda^3-16\lambda^2=0 \qquad \lambda=0$$

$$\lambda=\frac{1}{3} \qquad \rho(B_{GS})=\frac{1}{3}<1$$

Calcolo $\rho(B_J)$

$$\det\begin{bmatrix} +\lambda & 0 & +\frac{2}{3} \\ +\frac{1}{4} & +\lambda & +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{4} & +\frac{1}{2} & +\lambda \end{bmatrix} = \lambda\left(\lambda^2-\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{8}-\frac{\lambda}{4}\right)=0$$

$$\lambda^3-\frac{1}{4}\lambda+\frac{1}{12}-\frac{\lambda}{6}=0$$

$$12\lambda^3-3\lambda-2\lambda+1=0$$

$$12\lambda^3-5\lambda+1=0$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}+1=0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 12 & 0 & -5 & 1 \\ 1/2 & & 6 & 3 & -1 \\ \hline & 12 & 6 & -2 & // \end{array}$$

$$\left(6\lambda^2+3\lambda-1\right)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\lambda=\frac{-3\pm\sqrt{9+24}}{12}=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{12} \begin{array}{l} -0.7287 \\ 0.2287 \end{array}$$

$$\rho(B_J)=\frac{3+\sqrt{33}}{12}$$

$$R(B_J) = -\ln \frac{3+\sqrt{33}}{12} \approx 0.3165$$

$$R(B_{GS}) = -\ln \frac{1}{3} \approx 1.0986$$

$$R(B_{GS}) \approx 3.47\, R(B_J)$$

5) Sia $I = [-2,2]$ e $\Delta_I = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ una sua partizione. Esiste una spline cubica naturale $S(x)$ interpolante nei nodi di $\Delta_I$ tale che

$$S(x) = 0, \ x \in [-2,-1] \cup [1,2]$$

e $S(0) = 1$?

MILANO 31-01-18

Costruzione

$$S(x) = \begin{cases} a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d & x \in [-1,0) \\ Ax^3 + Bx^2 + Cx + D & x \in [0,1] \end{cases}$$

Calcolo $a, b, c, d$

$S'(x) = 3a(x+1)^2 + 2b(x+1) + c \qquad x \in [-1,0)$

$S''(x) = 6a(x+1) + 2b \qquad x \in [0,1]$

$S(-1) = d = 0$

$S'(-1^+) = c = 0 \qquad S(x) = (x+1)^3 \quad x \in [-1,0)$

$S''(-1^+) = 2b = 0$

$S(0^-) = a = 1$

Calcolo $A, B, C, D$

$S'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C \qquad x \in [0,1]$

$S''(x) = 6Ax + 2B \qquad x \in [0,1]$

$S(1^-) = A + B + C + D = 0$

$S'(1^-) = 3A + 2B + C = 0$

$S''(1^-) = 6A + 2B = 0$

$S(0^+) = D = 1$

$$\begin{cases} A + B + C = -1 \\ 3A + 2B + C = 0 \\ B = -3A \end{cases} \qquad \begin{cases} A - 3A + C = -1 \\ 3A - 6A + C = 0 \\ \_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\begin{cases} A - \cancel{3A} + \cancel{3A} = -1 \\ C = 3A \\ B = -3A \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -1 \\ B = 3 \\ C = -3 \\ D = 1 \end{cases} \qquad S(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = -(x-1)^3 \quad x \in [0,1]$$

$S'(0^-) = 3 \qquad S'(0^+) = -3$

$S''(0^-) = 6 \qquad S''(0^+) = +6$

$\Rightarrow S \notin C^1[-2,2]$

$\nexists S \ldots\ldots$