CALCOLO NUMERICO 1 (31 Gennaio 2018) - Prova scritta

COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

1) Sia data una formula di quadratura

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx \alpha_1 f(-a) + \alpha_2 f(0) + \alpha_3 f(a), \quad 0 < a < 2$$

1.1) Determinare i pesi α_i, $i = 1,\ 2,\ 3$ in funzione di a in modo che il grado di precisione sia almeno 2.

1.2) Calcolare il grado di precisione della formula ottenuta.

1.3) Generalizzare la formula all'intervallo $[-b, b]$, $b > 0$.

2) Si verifichi che la funzione $f(x) = x - e^{x/2} + 3$, $x \in I = [-5, 5]$ ha due zeri $\alpha < 0$ e $\beta > 0$. Si studi la convergenza e l'ordine dei metodi di punto fisso

$$x^{k+1} = g(x^k),\ k \geq 0,\ x_0 \in I,$$

con $g(x) = e^{x/2} - 3$ e $g(x) = 2\ln(x + 3)$.

3) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & a & -a \\ a & 4 & 0 \\ -a & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

determinare tutti e soli i valori di a per i quali:

3.1) A è diagonalmente dominante;

3.2) A è definita positiva.

Rappresentare graficamente le quantità $\|A\|_1$ e $\|A\|_2$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{3,1},$$

4.1) Trovare una permutazione di righe per cui il metodo di Jacobi applicato al sistema lineare risulti convergente.

4.2) Trovare il numero di iterazioni necessarie per ridurre l'errore di 1/1000 rispetto all'errore della approssimazione iniziale in norma $\|\cdot\|_\infty$.

4.3) Studiare la convergenza del metodo di Gauss Seidel per il sistema ottenuto al punto 4.1).

4.4) Stabilire la relazione fra le velocità asintotiche di convergenza dei due metodi.

5) Sia $I = [-2, 2]$ e $\Delta_I = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ una sua partizione. Esiste una spline cubica naturale $S(x)$ interpolante nei nodi di Δ_I tale che

$$S(x) = 0,\ x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$$

e $S(0) = 1$?