CALCOLO NUMERICO 1 (18 Gennaio 2018) - Seconda prova in itinere

COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

1) Data la funzione $f(x) \equiv e^{-x} + x^2 - 3$ dimostrare che l'equazione non lineare $f(x) = 0$, ha un'unica soluzione positiva α. Dimostrare che il metodo di Newton converge alla radice α per ogni scelta del valore iniziale $x_0 \in [1, 3]$.

$f(x) = 0 \quad f(x) = e^{-x} + x^2 - 3 \quad x_0 \in [1,3]$

1) $f(1) = \frac{1}{e} - 2 < 0 \quad ; \quad f(3) = \frac{1}{e^3} + 6 > 0$

2) $f'(x) = -e^{-x} + 2x > 0 \quad 2x > e^{-x} \quad x \in [1,3]$

3) $f''(x) = +e^{-x} + 2 > 0 \quad x \in [1,3]$

4) $f'(1) = -\frac{1}{e} + 2 \quad f'(3) = -\frac{1}{e^3} + 6$

$$\left|\frac{f(1)}{f'(1)}\right| = \frac{\frac{2e-1}{e}}{\frac{2e-1}{e}} = 1 < 3-1$$

$$\left|\frac{f(3)}{f'(3)}\right| = \frac{\frac{6e^3+1}{e^3}}{\frac{6e^3-1}{e^3}} = \frac{6e^3+1}{6e^3-1} < 2$$

$\Rightarrow \forall x_0 \in [1,3]$ la successione generata dal metodo di Newton converge all'unica radice positiva $\alpha \in [1,3]$.

2) Data la funzione $g(x) = \frac{1}{4}(x+3)$ studiare al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ la convergenza e l' ordine dei metodi iterativi $x_{n+1} = [g(x_n)]^k$, $n \geq 0$, per la ricerca dei punti fissi delle funzioni $[g(x)]^k$, con $k = 1$ e $k = 2$.
Nel caso di $k = 3$ dimostrare che esiste un opportuno intorno I_α del punto fisso $\alpha = 1$, tale che il metodo iterativo converge ad α per ogni scelta di $x_0 \in I_\alpha$.

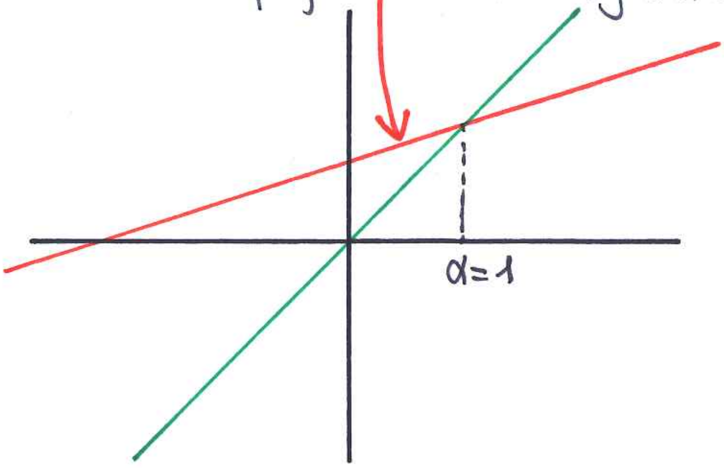
Milano 2° itinere 18/1/18

$x = [g(x)]^k = \left[\frac{1}{4}(x+3)\right]^k$ $\alpha = 1$ è p.f. $\forall k$

$k = 1$

$x = \frac{1}{4}(x+3)$ $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} = x$ $x = 1$ $\alpha = 1$

Un solo p.f. $\alpha = 1$ $g'(x) = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ convergenza $\forall$ $x_0 \in \mathbb{R}$
1^ ORDINE



$x_0 < \alpha$ succ. mon cresc. lim. sup da α $x_k \nearrow \alpha$

$x_0 > \alpha$ succ. mon decr. lim. inf da α $x_k \searrow \alpha$

$x = \left[\frac{1}{4}(x+3)\right]^2$ $g(x) = \frac{1}{16}(x^2+6x+9)$ $V(-3;0)$

$x = \frac{1}{16}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{9}{16}$ $x^2 - 10x + 9 = 0$ $x = 1$ $\alpha = 1$; $x = 9$ $\beta = 9$

$g'(x) = \frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$ $g'(\alpha = 1) = \frac{1}{2} < 1$ $\Rightarrow$ convergenza $x_0 \in I(\alpha)$ 1^ ORDINE

$g'(\beta = 9) = \frac{3}{2} > 1$ $\Rightarrow$ Divergenza locale $x_0 \in I(\beta)$

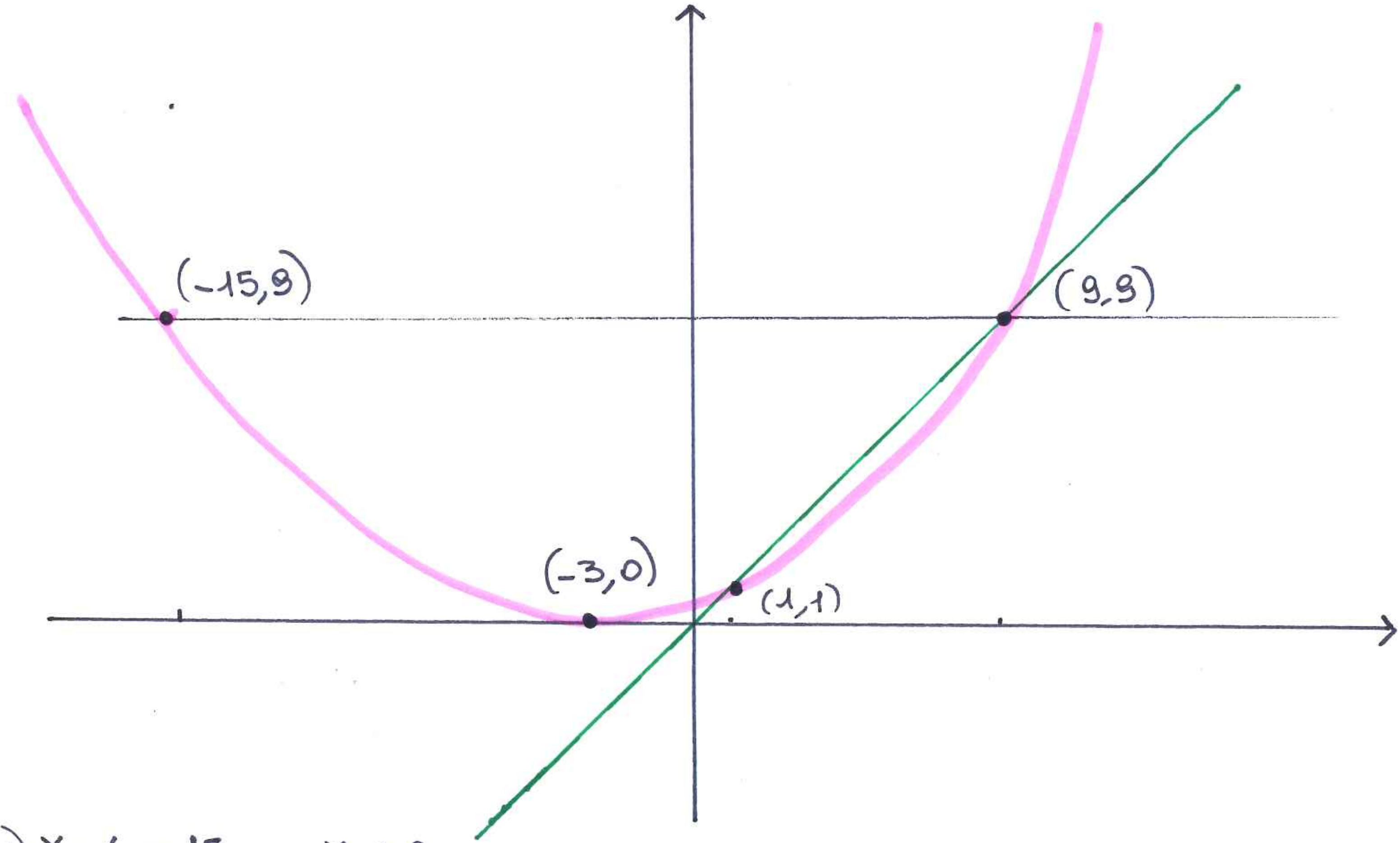
$g(x) = 9$ $\frac{1}{16}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{9}{16} = 9$

$x^2 + 6x - 135 = 0$ $(x+15)(x-9) = 0$

$x = -15$

$x = 9$

$g(x) = 1$ $x^2 + 6x + 9 = 16$ $x^2 + 6x - 7 = 0$ $(x+7)(x-1) = 0$ $\begin{cases} x = -7 \\ x = \alpha = 1 \end{cases}$



1) $x_0 < -15$ $\quad x_1 > 9$

2) $-15 < x_0 < -7$ $\quad 1 < x_1 < 9$

3) $-7 < x_0 < -3$ $\quad x_1 > 0$ (dunque $x_1 > -3$) $\Rightarrow$ CASO 4)

4) $-3 < x_0 < 1$ succ. mon. cresc. lim sup da α
$x_k \nearrow \alpha = 1$

5) $1 < x_0 < 9$ succ. mon. decr. lim inf da α
$x_k \searrow \alpha = 1$

6) $x_0 > 9$ succ. mon cresc. ill. sup. $x_k \nearrow +\infty$

CASI PARTICOLARI "$x_k = x_0$" $\forall k \geq 0$

$x_0 = 1$, $x_0 = 9$

$x_0 = -15 \Rightarrow x_1 = 9$

$x_0 = -7 \Rightarrow x_1 = 1$

MILANO 2° ITINERE 18/1/18

3) Data $f \in C^\infty([-1,1])$, determinare i coefficienti α, β, γ, ed il valore reale c, in modo tale che la formula di quadratura:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \alpha f(-1) + \beta f(c) + \gamma f(1)$$

abbia grado di precisione massimo. La formula ottenuta è una formula di tipo Gaussiano?

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \alpha f(-1) + \beta f(c) + \gamma f(1)$$

- $r=0 \quad f(x)=1$

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \qquad \alpha+\beta+\gamma=2$$

- $r=1 \quad f(x)=x$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \qquad -\alpha+\beta\cdot c+\gamma=0$$

- $r=2 \quad f(x)=x^2$

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \qquad \alpha+\beta\cdot c^2+\gamma=\frac{2}{3}$$

- $r=3 \quad f(x)=x^3$

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \qquad -\alpha+\beta c^3+\gamma=0$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=2 \\ -\alpha+\beta c+\gamma=0 \\ \alpha+\beta c^2+\gamma=\frac{2}{3} \\ -\alpha+\beta c^3+\gamma=0 \end{cases}$$

$2^a - 4^a$

$$-\cancel{\alpha}+\beta c+\cancel{\gamma}+\cancel{\alpha}-\beta c^3-\cancel{\gamma}=0$$

$$\beta(c-c^3)=0 \quad \begin{cases} \beta=0 \longrightarrow \begin{cases}\alpha+\gamma=1 & 1^a \\ \alpha+\gamma=\frac{2}{3} & 3^a\end{cases} \text{ IMPOSSIBILE} \\ c=\pm 1 \text{ No (sono già nodi della FQ)} \\ c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=2 \\ -\alpha+\gamma=0 \\ \alpha+\gamma=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$2\gamma=\frac{2}{3} \qquad \gamma=\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\frac{5}{3} \\ -\alpha=-\frac{1}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta=\frac{4}{3} \\ \alpha=\frac{1}{3} \end{cases}$$

FQ: $\frac{1}{3}f(-1)+\frac{4}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)$

Cavalieri - Simpson - Non è una FQ. Gaussiana

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}, \; \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{3,1},$$

4.1) studiare la convergenza del metodo di Jacobi;

4.2) studiare la convergenza del metodo iterativo:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \frac{1}{2} M^{-1}\mathbf{b} + M^{-1}N\mathbf{x}^{(n)}, \quad n \geq 0, \quad \mathbf{x}^{(0)}\text{dato},$$

dove

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix};$$

4.3) stabilire la relazione fra le velocità asintotiche di convergenza dei due metodi.

M I

2° itinere

18/1/18

4.1) $\det\begin{pmatrix} 2\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2\lambda \end{pmatrix} = 0 \qquad 2\lambda\left(4\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) + (-2\lambda) = 0$

$2\lambda\left(4\lambda^2 - \frac{5}{4}\right) = 0 \qquad \lambda = 0$

$\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{4}$

$\rho(B_J) = \frac{\sqrt{5}}{4} < 1 \Rightarrow$ converge (infatti A è diag. dom.)

4.2) $2x = M^{-1}b + 2M^{-1}Nx \qquad B = M^{-1}N$

$2Mx - 2Nx = b$

$(2M - 2N)x = b \qquad A = 2M - 2N$ (verifica)

$\det(M^{-1}N - \lambda I) = 0 \qquad \det M^{-1}(N - \lambda M) = 0$

$\underbrace{\det M^{-1}}_{\neq 0} \cdot \det(\lambda M - N) = 0$

$\det\begin{bmatrix} \lambda & -\frac{\lambda}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{4}\lambda \\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda \end{bmatrix} = \lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{16}\lambda\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) = 0$

$\lambda^3 - \frac{1}{16}\lambda^2 - \frac{\lambda^2}{4} = 0 \qquad \lambda^2 = 0 \qquad \lambda = \frac{5}{16} \qquad \rho(B) = \frac{5}{16} = \rho^2(B_J)$

$R(B) = 2R(B_J)$

5) Milano 2^ itinere - 18/1/18

Si consideri la seguente matrice $n \times n$, con $n \geq 2$,

$$A_n = \begin{pmatrix} n^2 & 1 & 2 & \dots & (n-2) & (n-1) \\ 1 & n^2 & 2 & 3 & \dots & (n-1) \\ 1 & 2 & n^2 & 3 & \dots & (n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & (n-1) & n^2 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che tale matrice è invertibile e che il metodo di Gauss-Seidel, applicato al sistema lineare $A_n\mathbf{x} = \mathbf{b}_n$, $\mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^{n,1}$, è convergente.

La matrice è diagonalmente dominante.

Infatti

$$n^2 > 1+2+\dots+n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$n^2 > \frac{n^2-n}{2} \qquad n^2 > -n$$

Diag. dom $\Rightarrow$ Invertibile (ex, dim. per assurdo)

" " $\Rightarrow$ Metodo G.S. converge