1) Dati i punti nel piano $P_1 = (-1, 1)$, $P_2 = (0, -1)$, $P_3 = (2, 1)$, costruire:
1.a) il polinomio $p(x)$ interpolante i punti;
1.b) la spline cubica naturale $s(x)$ interpolante i punti.
Calcolare
$$\max_{x\in[-1,2]} |s(x) - p(x)|$$

30 gennaio 2019

$$\begin{array}{cc|c|c} -1 & 1 & & \\ & & -2 & \\ 0 & -1 & & \frac{3}{3}=1 \\ & & \frac{2}{2}=1 & \\ 2 & 1 & & \end{array}$$

$$1 - 2(x+1) + x(x+1) = x^2 - x - 1 = p(x)$$

$$s(x) = \begin{cases} a + b(x+1) + c(x+1)^2 + d(x+1)^3 & x \in [-1, 0) \\ e + fx + gx^2 + hx^3 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$s'(x) = \begin{cases} b + 2c(x+1) + 3d(x+1)^2 \\ f + 2gx + 3hx^2 \end{cases} \qquad s''(x) = \begin{cases} 2c + 6d(x+1) \\ 2g + 6hx \end{cases}$$

Condizioni C^0, C^1, C^2

$a + b + c + d = e$

$b + 2c + 3d = f$

$2c + 6d = 2g \Rightarrow c + 3d = g$

Interpolazione

$a = +1$

$e = -1$

$e + 2f + 4g + 8h = 1$

Naturalità

$2c = 0$

$2g + 12h = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 1 \\ c = 0 \\ e = -1 \end{array}}$$

$$\begin{cases} b + d = -2 \\ b + 3d = f \\ 3d = g \\ -1 + 2f + 4g + 8h = 1 \\ g + 6h = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} b = -d - 2 \\ f = -d - 2 + 3d = 2d - 2 \\ g = 3d \end{array}} \\ -1 + 4d - 4 + 12d + 8h = 1 \\ 3d + 6h = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16d + 8h = 6 \\ d = -2h \end{cases} \qquad \begin{cases} -32h + 8h = 6 \\ d = -2h \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} h = -\frac{1}{4} \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} b &= -\frac{5}{2} \\ f &= -1 \\ g &= \frac{3}{2} \end{aligned}}$$

$$S(x) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x+1)^3 & x \in [-1,0) \\ -1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 & x \in [0,1] \end{cases}$$

$$e(x) = S(x) - p(x) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x+1)^3 - x^2 + x + 1 & x \in [-1,0) \\ \cancel{-1} \cancel{-x} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 - x^2 \cancel{+x} \cancel{+1} & x \in [0,1] \end{cases}$$

$$e(x) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{2}x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} - x^2 + x + 1 & x \in [-1,0) \\ -\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 & x \in [0,1] \end{cases}$$

$$e(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 & x \in [-1,0) \\ -\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 & x \in [0,1] \end{cases} \qquad e'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + x \\ -\frac{3}{4}x^2 + x \end{cases}$$

$$e'(x) = 0 \quad \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + x = 0 & x = 0 \lor x = -\frac{2}{3} \\ -\frac{3}{4}x^2 + x = 0 & x = 0 \lor x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$e(-1) = e(0) = e(2) = 0$ (condizioni di interpolazione)

$$e\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{27} + \frac{2}{9} = \frac{-4+6}{27} = \frac{2}{27}$$

$$e\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{16}{27} + \frac{8}{27} = -\frac{8}{27}$$

$$\max_{-1 \le x \le 2} |S(x) - p(x)| = \frac{8}{27}$$

2) Data la famiglia di funzioni $g(x) = (x-1)^m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, trovare i punti fissi nel caso di $m = 3$ e $m = 4$ e studiare la convergenza e l'ordine dei corrispondenti metodi iterativi $x_{n+1} = g(x_n)$, al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$.
Generalizzare i risultati trovati al caso di m numero pari e m numero dispari.

30 gennaio 2019

$m=3$

$(x-1)^3+1=x$

$(x-1)^3=(x-1)$

$[(x-1)^2-1](x-1)=0$

$[x-2][x][x-1]=0$

p. fissi: $\alpha=0$
$\beta=1$
$\gamma=2$

$g'(x)=3(x-1)^2$

$g'(\alpha)=3=g'(\gamma)>1$

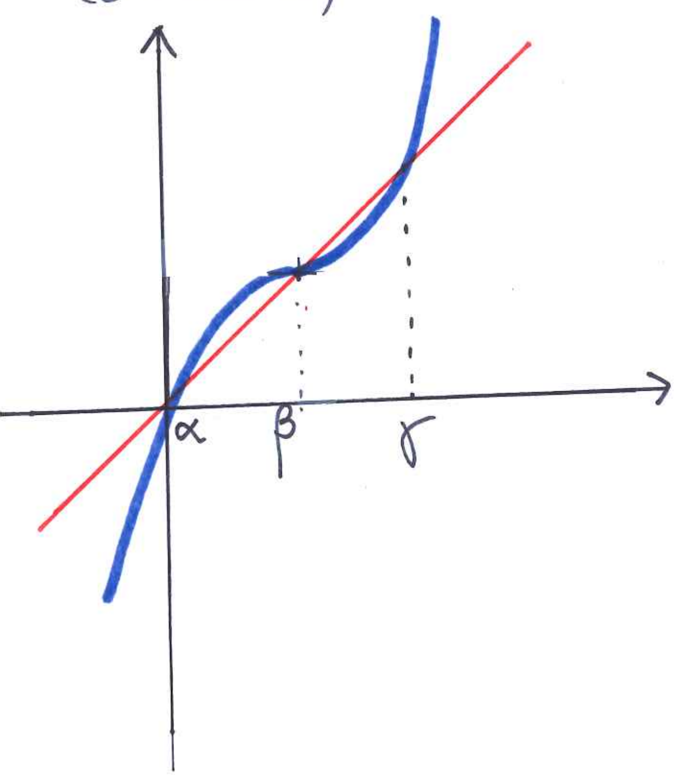
$g'(\beta)=0$

$g''(x)=6(x-1)$ $\quad g''(\beta)=0$

$g'''(x)=6$ $\quad g'''(\beta)\neq 0$

Divergenza locale: α, γ

Convergenza locale: β
(3° ordine)



$m=4$

$(x-1)^4+1=x$

$(x-1)^4=(x-1)$

$(x-1)[(x-1)^3-1]=0$

$(x-1)[(x-1)-1][(x-1)^2+(x-1)+1]=0$

p. fissi: $\beta=1$
$\gamma=2$

$g'(x)=4(x-1)^3$

$g'(\beta)=0$ $\quad g'(\gamma)=4>1$

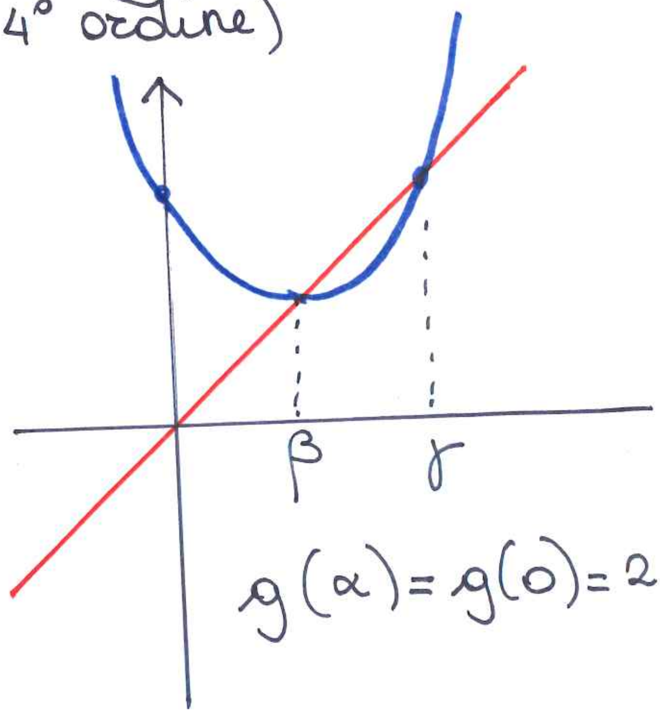
$g''(x)=12(x-1)^2$ $\quad g''(\beta)=0$

$g'''(x)=24(x-1)$ $\quad g'''(\beta)=0$

$g^{IV}(x)=24$ $\quad g^{IV}(\beta)\neq 0$

Divergenza locale: γ

Convergenza locale: β
(4° ordine)



$g(\alpha)=g(0)=2=\gamma$

$x_0 < \alpha \quad x_n \searrow -\infty$

"$x_0 = \alpha$" $\quad x_n = \alpha \quad \forall n$

$\alpha < x_0 < \beta$ successione monotona crescente limitata sup da β

$x_n \nearrow \beta$

"$x_0 = \beta$" $\quad x_n = \beta \quad \forall n$

$\beta < x_0 < \gamma$ x_n successione monotona decrescente lim. inf. da β

$x_n \searrow \beta$

$x_0 = \gamma \quad x_n = \gamma \quad \forall n$

$x_0 > \gamma \quad x_n \nearrow +\infty$

$\alpha < x_0 < \gamma \quad x_n \to \beta$

ordine 3

$x_0 < \alpha \quad x_1 > \gamma$

$\alpha < x_0 < \beta \qquad \beta < x_1 < \gamma$

$\beta < x_0 < \gamma$ successione monotona decrescente limitata inferiormente da β

$x_n \searrow \beta$

$x_0 > \gamma \quad x_n \nearrow +\infty$

$x_0 = 0 \quad x_1 = \gamma \quad x_n = \gamma \quad \forall n$

$x_0 = \beta \quad x_n = \beta \quad \forall n$

$x_0 = \gamma \quad x_n = \gamma \quad \forall n$

$\alpha < x_0 < \gamma \quad x_n \to \beta$

ordine 4

Caso generale: n dispari

$g(x) = (x-1)^{2n-1} + 1 \quad n = 1, 2, 3, 4 \ldots$

$g'(x) = (2n-1)(x-1)^{2n-2}$

$g''(x) = (2n-1)(2n-2)(x-1)^{2n-3}$

$\vdots$

$g^{(2n-1)}(x) = (2n-1)! \neq 0$

$g'(0) = (2n-1)(-1)^{2n-2}$

$|g'(0)| = 2n-1 \geq 1$

caso banale
$n = 1$
$g(x) = x$

$g'(2) = 2n-1 \geq 1$

$g'(1) = 0 = \cdots = g^{(2n-2)}(1)$

$g^{(2n-1)}(1) \neq 0 \quad$ ordine $2n-1$

Caso generale: n pari

$g(x) = (x-1)^{2n} + 1 \quad n = 1, 2, 3,$

$g'(x) = 2n(x-1)^{2n-1}$

$g''(x) = 2n(2n-1)(x-1)^{2n-2}$

$\vdots$

$g^{(2n)}(x) = (2n)! \neq 0$

$g'(1) = 0 = \cdots = g^{(2n-1)}(1)$

$g^{(2n)}(1) \neq 0 \quad$ ordine $2n$

$g'(2) = 2n \geq 1$

CONVERGENZA LOCALE SOLO A β SIA PER n dispari che pari

30/1/2019

3) Dato l'integrale definito

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

si trovino i pesi ed i nodi della formula di quadratura

$$\tilde{I}(f) = B_1 f(-c) + B_2 f(0) + B_3 f(c) \quad 0 < c \le 1,$$

in modo tale che abbia grado di precisione massimo. La formula è di tipo Gaussiano?

$f=1 \quad \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \qquad B_1+B_2+B_3 = 2$

$f=x \quad \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \qquad -B_1 c + B_3 c = 0 \qquad B_1 = B_3$

$f=x^2 \quad \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} \qquad B_1 c^2 + B_1 c^2 = \frac{2}{3} \qquad B_1 c^2 = \frac{1}{3}$

$f=x^3 \quad \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 \qquad -B_1 c^3 + B_1 c^3 = 0 \qquad \forall B_1, c$

$f=x^4 \quad \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{5} \qquad B_1 c^4 + B_1 c^4 = \frac{2}{5} \qquad B_1 c^4 = \frac{1}{5}$

$$\begin{cases} B_1 c^2 = \frac{1}{3} \\ B_1 c^4 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$B_1 \neq 0$ ($B_1 = 0$ non è soluzione)

$c \neq 0$ per ipotesi, inoltre non può essere soluzione

$$c^2 = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} \qquad c^2 = \frac{3}{5} \qquad c = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$B_1 \frac{3}{5} = \frac{1}{3} \qquad B_1 = \frac{5}{9} \qquad B_3 = \frac{5}{9}$$

$$B_2 = 2 - \frac{10}{9} = \frac{8}{9}$$

E' la formula di Gauss-Legendre a 3 punti

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{3,1}$$

determinare tutti e soli i valori di α per i quali:

4.1) A è definita positiva.

4.2) Il metodo di Jacobi converge.

4.3) Il metodo di Gauss-Seidel converge.

4.4) Per i valori di α trovati al punto 4.1), determinare una condizione necessaria e sufficiente su $\omega \in \mathbb{R}$ per la convergenza del metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \omega \mathbf{x}_J^{(k+1)} + (1-\omega)\mathbf{x}^{(k)}, \quad \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^{3,1},$$

dove $\mathbf{x}_J^{(k+1)}$ è il vettore ottenuto applicando un passo del metodo di Jacobi al vettore $\mathbf{x}^{(k)}$.

1

A definita positiva. Criterio di Sylvester

$$\begin{cases} 2>0 \\ 4-\alpha^2>0 \\ 2(4-\alpha^2)-\alpha(2\alpha)>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2<\alpha<2 \\ 4-2\alpha^2>0 \end{cases} \qquad -\sqrt{2}<\alpha<\sqrt{2}$$

Essendo $a_{ii}>0$, (A simmetrica) allora il metodo di Gauss-Seidel converge se e solo se A è definita positiva.

Dunque $\iff -\sqrt{2}<\alpha<\sqrt{2}$

Essendo A tridiagonale il metodo di Jacobi converge se e solo se converge il metodo di Gauss-Seidel,

$\iff -\sqrt{2}<\alpha<\sqrt{2}$

In alternativa: calcolo di $\rho(B_J)$, $\rho(B_{GS})$

B_J: $\begin{vmatrix} 2\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & 2\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha & 2\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad 2\lambda(4\lambda^2-\alpha^2)-\alpha(2\alpha\lambda)=0$

$\lambda(4\lambda^2-2\alpha^2)=0 \quad \lambda=0 \quad \lambda=\pm\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$

$\rho(B_J)=\frac{|\alpha|}{\sqrt{2}}<1 \qquad |\alpha|<\sqrt{2}$

$-\sqrt{2}<\alpha<\sqrt{2}$

A tridiagonale, $\rho(B_{GS})=[\rho(B_J)]^2=\frac{\alpha^2}{2}$; oppure:

B_{GS}: $\begin{vmatrix} 2\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha\lambda & 2\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha\lambda & 2\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda(4\lambda^2-\alpha^2\lambda)-\alpha\lambda(2\alpha\lambda)=0$

$4\lambda^3-2\alpha^2\lambda^2=0 \qquad \lambda_{1,2}=0 \quad \lambda_3=\frac{\alpha^2}{2}$

$\rho(B_{GS})=\frac{\alpha^2}{2}<1 \qquad -\sqrt{2}<\alpha<\sqrt{2}$

4.4 2

$$x_J^{(k+1)} = D^{-1}(D-A)x^{(k)} + D^{-1}b = (I - D^{-1}A)x^{(k)} + D^{-1}b$$

matrice di iterazione:

$$\omega(I - D^{-1}A) + (1-\omega)I = \omega I - \omega D^{-1}A + I - \omega I = I - \omega D^{-1}A$$

Se $\underline{x}^{(k)} \to \underline{x}$ $\quad \cancel{x} = \omega x - \omega D^{-1}Ax + D^{-1}b + (1-\omega)x$

$$= \cancel{\omega x} - \omega D^{-1}Ax + \omega D^{-1}b + \cancel{x} - \cancel{\omega x}$$

$$\boxed{B = I - \omega D^{-1}A} \qquad \omega D^{-1}Ax = \omega D^{-1}b \qquad Ax = b$$

1° modo

$(I - \omega D^{-1}A)x = \mu x$ $\qquad \mu$ autovalori di B

$$Ix - \omega D^{-1}Ax = \mu x$$

$$\omega D^{-1}Ax = (I - \mu I)x$$

$$Ax = \frac{1}{\omega}(1-\mu)Dx \qquad D = \text{diag } A = \{a_{ii} = 2\}$$

$$\lambda(A) = \frac{1}{\omega}(1-\mu) \cdot 2$$

$$\lambda = \frac{2}{\omega}(1-\mu) \qquad 1-\mu = \frac{\omega\lambda}{2} \qquad \mu = 1 - \frac{\omega\lambda}{2}$$

Calcolo autovalori di A

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & 2-\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - \alpha^2\right] - \alpha^2(2-\lambda) =$$

$$(2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 2\alpha^2\right] = 0 \qquad \lambda = 2 \qquad (\lambda-2)^2 = 2\alpha^2 \qquad \lambda = 2 \pm \alpha\sqrt{2}$$

$$\mu = 1 - \frac{\omega\lambda}{2} \qquad \lambda \in \left\{2; 2+\alpha\sqrt{2}; 2-\alpha\sqrt{2}\right\}$$

3

$$\begin{cases} \mu_1 = 1 - \frac{2\cdot\omega}{2} = 1-\omega \\ \mu_2 = 1-\omega\ \frac{2+\alpha\sqrt{2}}{2} = 1-\omega-\omega\alpha\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \mu_3 = 1-\omega\ \frac{2-\alpha\sqrt{2}}{2} = 1-\omega+\omega\alpha\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$

Costruzione di $B = I - \omega D^{-1}A \qquad \det(B - \mu I) = 0$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega/2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega/2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1-\omega-\mu & -\frac{\omega}{2}\alpha & 0 \\ -\frac{\omega}{2}\alpha & 1-\omega-\mu & -\frac{\omega}{2}\alpha \\ 0 & -\frac{\omega}{2}\alpha & 1-\omega-\mu \end{bmatrix} =$$

$$(1-\omega-\mu)\left[(1-\omega-\mu)^2 - \frac{\omega^2\alpha^2}{4}\right] + \frac{\omega}{2}\alpha\left(-\frac{\omega\alpha}{2}\right)(1-\omega-\lambda) = 0$$

$$(1-\omega-\mu)\left[(1-\omega-\mu)^2 - \frac{\omega^2\alpha^2}{2}\right] = 0$$

1) $1-\omega-\mu = 0 \qquad \mu_1 = 1-\omega$

$(1-\omega-\mu)^2 = \frac{\omega^2\alpha^2}{2} \qquad (1-\omega-\mu) = \pm\frac{\omega\alpha\sqrt{2}}{2}$

2) $1-\omega-\mu = \frac{\omega\alpha\sqrt{2}}{2} \qquad \mu_2 = 1-\omega-\frac{\omega\alpha\sqrt{2}}{2}$

3) $1-\omega-\mu = -\frac{\omega\alpha\sqrt{2}}{2} \qquad \mu_3 = 1-\omega+\omega\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases} \mu_1 = 1-\omega \\ \mu_2 = 1-\omega-\frac{\omega\alpha\sqrt{2}}{2} \\ \mu_3 = 1-\omega+\frac{\omega\alpha\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

CNS per la convergenza   NB $-\sqrt{2}<\alpha<\sqrt{2}$ 4

- $|1-\omega|<1$ $\boxed{0<\omega<2}$

- $\left|1-\omega-\dfrac{\omega\alpha\sqrt{2}}{2}\right|<1$

$0<\omega\left(1+\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)<2$ $\boxed{\omega>0}$

$1+\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}>0$ $\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}>-1$ $\alpha>-\dfrac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$ Vero

$$\omega<\frac{2}{1+\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}$$

- $\left|1-\omega+\dfrac{\omega\alpha\sqrt{2}}{2}\right|<1$

$0<\omega\left(1-\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)<2$ $\boxed{\omega>0}$

$1-\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}>0$ $\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}<1$ $\alpha<\sqrt{2}$ Vero

$$\omega<\frac{2}{1-\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}$$

$\dfrac{2}{\underbrace{1+\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}_{>0}}<2$? $1+\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}>1$ $\alpha>0$

$\dfrac{2}{\underbrace{1-\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}_{>0}}<2$ $1-\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}>1$ $\alpha<0$

5

- Se $-\sqrt{2} < \alpha < 0$

$$0 < \frac{2}{1 - \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}} < 2 < \frac{2}{1 + \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}$$

$$\min \left\{ \frac{2}{1 \pm \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}} , 2 \right\} = \frac{2}{1 - \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}} \qquad 0 < \omega < \frac{2}{1 - \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}$$

- Se $0 < \alpha < \sqrt{2}$

$$0 < \frac{2}{1 + \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}} < 2 < \frac{2}{1 - \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}$$

$$\min \left\{ \frac{2}{1 \pm \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}} , 2 \right\} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}} \qquad 0 < \omega < \frac{2}{1 + \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}$$

- Se $\alpha = 0$

$$0 < \omega < 2$$