CALCOLO NUMERICO (30 gennaio 2019)

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

1) Dati i punti nel piano $P_1 = (-1, 1)$, $P_2 = (0, -1)$, $P_3 = (2, 1)$, costruire:
   1.a) il polinomio $p(x)$ interpolante i punti;
   1.b) la spline cubica naturale $s(x)$ interpolante i punti.
   Calcolare
$$\max_{x\in[-1,2]} |s(x) - p(x)|$$

2) Data la famiglia di funzioni $g(x) = (x-1)^m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, trovare i punti fissi nel caso di $m = 3$ e $m = 4$ e studiare la convergenza e l'ordine dei corrispondenti metodi iterativi $x_{n+1} = g(x_n)$, al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$.

   Generalizzare i risultati trovati al caso di m numero pari e m numero dispari.

3) Dato l'integrale definito
$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\, \mathrm{d}x,$$
   si trovino i pesi ed i nodi della formula di quadratura
$$\tilde{I}(f) = B_1 f(-c) + B_2 f(0) + B_3 f(c) \quad 0 < c \leq 1,$$
   in modo tale che abbia grado di precisione massimo. La formula è di tipo Gaussiano?

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{3,1}$$
   determinare tutti e soli i valori di α per i quali:

   4.1) A è definita positiva.

   4.2) Il metodo di Jacobi converge.

   4.3) Il metodo di Gauss-Seidel converge.

   4.4) Per i valori di α trovati al punto 4.1), determinare una condizione necessaria e sufficiente su $\omega \in \mathbb{R}$ per la convergenza del metodo iterativo
$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \omega \mathbf{x}_J^{(k+1)} + (1-\omega)\mathbf{x}^{(k)}, \quad \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^{3,1},$$
   dove $\mathbf{x}_J^{(k+1)}$ è il vettore ottenuto applicando un passo del metodo di Jacobi al vettore $\mathbf{x}^{(k)}$.

5) È vero (si fornisca una dimostrazione) o falso (si dia un controesempio) che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è un funzione continua con una radice α, per cui la successione generata dal metodo di Newton sia ben definita se $x_0 \neq \alpha$ e rimanga limitata, allora il metodo di Newton è convergente?