Cognome: ____________ Nome: ____________ Matricola: ____________

CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 30 gennaio 2019

1) Siano date le funzioni f_1 e f_2 aventi come unico zero reale $\alpha = 0$, dove:

$$f_1(x) = x^5 + \frac{x}{10^{-6}}, \qquad f_2(x) = x^5 + \frac{x}{10^6}.$$

1.a) Si approssimi α per la funzione f_1 con il metodo di bisezione, partendo dall'intervallo $[-1, 10]$ e usando come test d'arresto $|x_N - \alpha| < \texttt{1e} - \texttt{3}$. Quante iterazioni sono necessarie?

Si consideri ora il metodo di Newton e si approssimi α scegliendo il valore iniziale $x_0 = 10$, con test d'arresto $|x_N - x_{N+1}| < \texttt{1e} - \texttt{3}$. Quante iterazioni sono necessarie?

1.b) Si calcoli l'approssimazione di α per f_2 con gli stessi metodi e test d'arresto del punto 1.a). Quante iterazioni sono necessarie ora?

Si dia una spiegazione dei risultati ottenuti.

RISULTATI

$f_1(x)$: Metodo di bisezione: N= Metodo di Newton: N=

$f_2(x)$: Metodo di bisezione: N= Metodo di Newton: N=

Spiegazione:

2) Data $f(x) = 10\mathrm{e}^{-x/25}\sin(x)$, si consideri il problema del calcolo approssimato dell'integrale definito:

$$I = \int_0^{50} f(x)\,dx.$$

Sia inoltre $S_3(x)$ la spline cubica *not-a-knot* interpolante $f(x)$ su $[0, 50]$ ottenuta con il comando Matlab `spline`. Si consideri l'approssimazione

$$I \simeq I_s = \int_0^{50} S_3(x)\,dx.$$

Si calcoli l'errore $e_s = |I - I_s|$ utilizzando successivamente $m = [5, 50, 500, 5000]$ intervalli per il calcolo della spline. (Suggerimento: per il calcolo di I si assuma come valore esatto il risultato ottenuto con il comando `integral`; per il calcolo di I_s si utilizzi - facendo attenzione alla forma del polinomio prodotta da Matlab!- il comando `polyint`.)

m	e_s
5	
50	
500	
5000	

3) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} X & O & O & Y \\ O & X & Y & O \\ O & Y & X & O \\ Y & O & O & X \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\alpha} & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 1 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{\alpha} I_4, \; O = 0_4, \; \alpha \in \mathbb{R},$$

dove I_4 e 0_4 sono, rispettivamente, la matrice identità e la matrice nulla $\in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Si costruiscano le matrici di iterazione $B_{J,\alpha}$ e $B_{G,\alpha}$ relative, rispettivamente, ai metodi di Jacobi e Gauss-Seidel e si riportino i valori dei rispettivi raggi spettrali $\rho(B_{J,\alpha})$ e $\rho(B_{G,\alpha})$ al variare di $\alpha = 2^k,\; k = 3, 4, 5, 6$.

Supponendo inoltre che siano note le seguenti relazioni tra i valori di α e i valori dei raggi spettrali delle matrici di iterazione:

$$\rho(B_{J,\alpha}) \approx C_1 \frac{1}{\alpha^p}, \quad \rho(B_{G,\alpha}) \approx C_2 \frac{1}{\alpha^q},$$

si calcolino i valori dei rapporti

$$\frac{\rho(B_{J,\alpha})}{\rho(B_{J,2\alpha})}, \quad \frac{\rho(B_{G,\alpha})}{\rho(B_{G,2\alpha})}, \; \alpha = 2^k, \; k = 3, 4, 5,$$

e si deduca per quali p e q le relazioni sono verificate.

RISULTATI

$\alpha = \; 2^3 : \; \rho(B_{J,\alpha}) =$ $\qquad\qquad$ $\rho(B_{G,\alpha}) =$

$\alpha = \; 2^4 : \; \rho(B_{J,\alpha}) =$ $\qquad\qquad$ $\rho(B_{G,\alpha}) =$

$\alpha = \; 2^5 : \; \rho(B_{J,\alpha}) =$ $\qquad\qquad$ $\rho(B_{G,\alpha}) =$

$\alpha = \; 2^6 : \; \rho(B_{J,\alpha}) =$ $\qquad\qquad$ $\rho(B_{G,\alpha}) =$

$p =$ $\qquad\qquad$ $q =$