CALCOLO NUMERICO 1 (24 gennaio 2019)
SECONDA PROVA IN ITINERE

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

1) Data l'equazione non lineare $f(x) \equiv x^3 - 5x + 4 = 0$, avente 3 radici reali $\alpha < 0$, $\beta = 1$, $\gamma > 1$, dimostrare che il metodo di Newton converge ad α per ogni $x_0 \in [-3, -2]$. Successivamente si studi la convergenza e l'ordine del metodo iterativo

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 4}{5}, \ k \geq 0, \ x_0 \in \mathbb{R},$$

per l'approssimazione di $\alpha, \ \beta, \ \gamma$.

$f(-3) = -27 + 15 + 4 = -8 < 0 \qquad f(-2) = -8 + 10 + 4 = 6 > 0$

$f'(x) = 3x^2 - 5 > 0 \ \forall x \in [-3, -2] \qquad f'(-3) = 22 \qquad f'(-2) = 7$

$f''(x) = 6x < 0 \quad \forall x \in [-3, -2]$ MdN converge ad $\alpha \in [-3, -2]$

$\Rightarrow \forall x_0 \in [-3, -2]$

$\left| \frac{f(-3)}{f'(-3)} \right| = \frac{8}{22} < 1 \qquad \left| \frac{f(-2)}{f'(-2)} \right| = \frac{6}{7} < 1$

$[\, x^3 - 5x + 4 = (x-1)(x^2 + x - 4) = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} = \begin{cases} \approx 1.56 = \gamma \\ \approx -2.56 = \alpha \end{cases}$

$g(x) = \frac{x^3 + 4}{5} \qquad \frac{x^3 + 4}{5} = x \qquad x^3 - 5x + 4 = 0 \qquad g'(x) = \frac{1}{5} 3x^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

g crescente

$g'(0) = 0 \qquad g(0) = \frac{4}{5}$

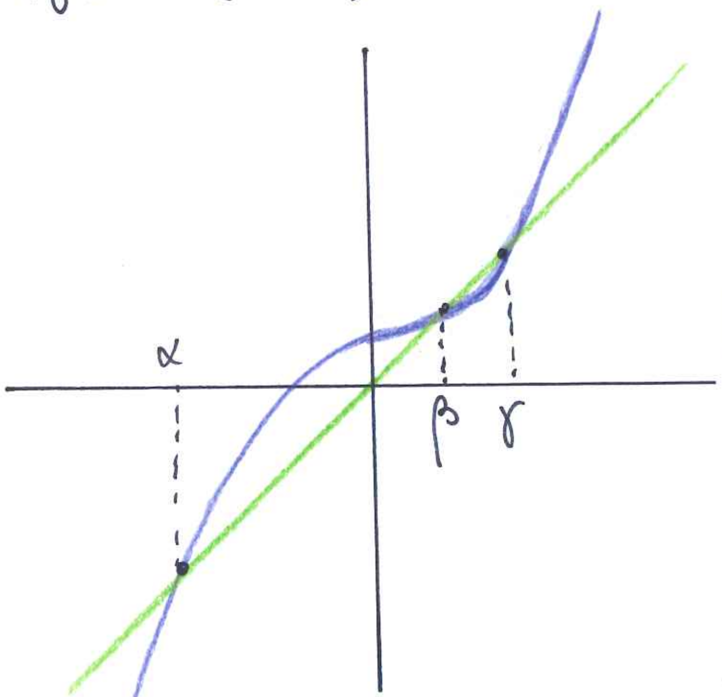
x	-3	-2	$+1$	$\frac{3}{2}$	2
$g(x)$	-4.6	-0.8	1	1.475	2.4

$-3 < \alpha < -2 \qquad \beta \qquad \frac{3}{2} < \gamma < 2$

$g'(\alpha) \in (2.4, 5.4)$ Div. locale $[g'(-2) < g'(\alpha) < g'(-3)]$

$g'(1) = \frac{3}{5}$ Conv. locale, ordine 1

$g'(\gamma) \in (1.35, 2.4)$ Div. locale $[g'(\frac{3}{2}) < g'(\gamma) < g'(2)]$



$x_0 < \alpha$ succ. mon. decr. ill. inf $x_n \searrow -\infty$

$x_0 = \alpha$ "$x_n = \alpha$" $\forall n$

$\alpha < x_0 < \beta$ succ. mon. cresc. lim sup da β
$x_n \nearrow \beta$

$x_0 = \beta \quad x_n = \beta \quad \forall n$

$\beta < x_0 < \gamma$ succ. mon. decr. lim inf da β: $x_n \searrow \beta$

$x_0 = \beta \quad x_n = \beta \quad \forall n$

$x_0 > \gamma \quad x_n \nearrow +\infty$
(succ mon cresc. ill. sup)

2) Date le funzioni

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right), \quad h(x) = \frac{1}{2}x\left(3 - \frac{x^2}{a}\right), \quad a > 0:$$

2.1) trovare i punti fissi comuni a g e h.

2.2) Verificare che i metodi iterativi $x_{k+1} = g(x_k)$ e $x_{k+1} = h(x_k)$, $k \geq 0$, convergono localmente al punto fisso α di ascissa positiva e stabilire l'ordine di convergenza.

2.3) Determinare se esistono valori λ, $\mu \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione

$$\Phi(x) = \lambda g(x) + \mu h(x)$$

abbia punto fisso α e il metodo iterativo associato $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ converga localmente ad α almeno con ordine 3.

2° itinere
24-1-'19

$x = g(x) \qquad x = \frac{x}{2} + \frac{a}{2x} \qquad \frac{x}{2} = \frac{a}{2x} \qquad x^2 = a \qquad x = \pm\sqrt{a}$

$x = h(x) \qquad x = \frac{1}{2}x\left(3 - \frac{x^2}{a}\right) \qquad x = \frac{3}{2}x - \frac{x^3}{2a} \qquad \frac{x^3}{a} - x = 0 \quad x = 0 \quad x = \pm\sqrt{a}$

Punti fissi comuni: $\pm\sqrt{a}$; $\alpha = \sqrt{a}$

$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2} \qquad g'(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{a} = 0$

$h'(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2a}x^2 \qquad h'(\sqrt{a}) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2a}\cdot a = 0$

$\Rightarrow$ conv. locale almeno del 2° ordine

$\phi(\alpha) = \lambda g(\alpha) + \mu h(\alpha) = \lambda\alpha + \mu\cdot\alpha = \alpha \Rightarrow \lambda + \mu = 1$
(α punto fisso di ϕ)

$\phi'(x) = \lambda g'(x) + \mu h'(x)\Big|_{x=\alpha} = 0$ essendo $g'(\alpha) = h'(\alpha) = 0$

$\phi''(x) = \lambda\left[\frac{a}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{x^3}\right] + \mu\left[-\frac{3}{2a}\cdot 2x\right]$

$\phi''(\alpha) = \phi''(\sqrt{a}) = \lambda\frac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{a}} - \mu\frac{3\sqrt{a}}{a} = (\lambda - 3\mu)\frac{1}{\sqrt{a}} = 0$

$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - 3\mu = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4\mu = 1 \\ \lambda = 3\mu \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu = \frac{1}{4} \\ \lambda = \frac{3}{4} \end{cases}$

3) Rappresentare graficamente la quantità $K_\infty(A)$ al variare di $a > 0$, con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix},$$

e trovare a tale che $K_\infty(A)$ sia minimo. Calcolare la fattorizzazione $A = LU$.

2° itinere

24-1-'19

Calcolo $A^{-1} = -\frac{1}{a}\begin{bmatrix} 1+a & +1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $\boxed{a>0}$

$\det A = -1-a+1 = -a$

$\|A\|_\infty = \max\{2, 2+a\} = a+2$

$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{a}\max\{2+a, 2\} = \frac{a+2}{a}$

$K_\infty(A) = \frac{1}{a}(a^2+4a+4) = a+4+\frac{4}{a} = f(a)$

$f'(a) = 1-\frac{4}{a^2} > 0 \quad a^2-4>0 \quad a>2$ min: $a=2$

$K_\infty(2) = 2+4+2 = 8$

$m_{21} = -1$

$a_{22} = 1+a-(-1).(-1) = 1+a-1 = a$

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2a & a & 0 & 1 \\ a & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & a \\ 1 & 0 & a & 2a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{4,1},$$

con $a \in \mathbb{R}$ tale che la matrice A sia non singolare, trovare una condizione necessaria e sufficiente su a per la convergenza del metodo iterativo:

$$M\mathbf{x}^{(n+1)} = N\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{b}, \quad n \geq 0, \quad \mathbf{x}^{(0)}\text{dato}, \; M = \begin{pmatrix} 2a & a & 0 & 0 \\ a & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & a \\ 0 & 0 & a & 2a \end{pmatrix}, \; N = M - A.$$

2° itinere
24-1-'19

A non singolare: $\det \begin{bmatrix} 2a & a & 0 & 1 \\ a & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & a \\ 1 & 0 & a & 2a \end{bmatrix}$

$$2a \begin{vmatrix} 2a & a & 1 \\ a & 2a & 0 \\ 1 & 0 & 2a \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 2a & a & 0 \\ a & 2a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} =$$

$$2a\left\{-2a + 2a \cdot 3a^2\right\} - a^2(3a^2) = -4a^2 + 12a^4 - 3a^4 = 9a^4 - 4a^2 = 0$$

$a = 0 \qquad a = \pm \frac{2}{3}$

Per $a \neq 0$ M è diag. dom. $\Rightarrow$ non singolare

$Ax = b \quad (M-N)x = b \quad Mx = Nx + b \quad B = M^{-1}N$

$\det(M^{-1}N - \lambda I) = \det\left[M^{-1}(N - M\lambda I)\right] =$

$\cancel{\det M^{-1}} \det(N - \lambda M) = 0 \qquad \det(\lambda M - N) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} 2a\lambda & a\lambda & 0 & 1 \\ a\lambda & 2a\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a\lambda & a\lambda \\ 1 & 0 & a\lambda & 2a\lambda \end{bmatrix} = 9a^4\lambda^4 - 4a^2\lambda^2 = 0 \qquad \lambda^2 = 0$$

$9a^2\lambda^2 - 4 = 0 \qquad \lambda^2 = \frac{4}{9a^2} \qquad \lambda = \pm \frac{2}{3a}$

$$\rho(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{|a|} < 1 \qquad |a| > \frac{2}{3}$$

5) Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ($n \geq 2$) è una matrice con elementi $a_{ii} = n,\ i = 1, ..., n$ e $a_{ij} = 1,\ i \neq j$, e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Stabilire, senza calcolare il raggio spettrale della matrice di iterazione associata, se il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \omega(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}),\ \omega = \frac{1}{\|A\|_\infty},\ k \geq 0,\ \mathbf{x}^{(0)}\text{dato},$$

converge a $\mathbf{x}$.

2° itinere 24-1-'19

$$A = \begin{bmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{bmatrix}$$

$$\|A\| = n + (n-1) = 2n-1$$

$$\omega = \frac{1}{2n-1}$$

$$B = I - \omega A = I - \frac{1}{2n-1} \cdot A$$

$$B = \begin{cases} B_{ii} = 1 - \frac{1}{2n-1} \cdot n = \frac{2n-1-n}{2n-1} = \frac{n-1}{2n-1} \\ B_{ij} = -\frac{1}{2n-1} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$\|B\|_\infty = \underbrace{\frac{n-1}{2n-1}}_{B_{ii}} + \underbrace{(n-1)}_{n^\circ \text{ elementi esclusa la diagonale}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2n-1}}_{|B_{ij}|} = \frac{n-1+n-1}{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1}$$

$$\|B\|_\infty < 1 \Rightarrow \rho(B) < 1 \Rightarrow \text{converge } \forall n$$