CALCOLO NUMERICO 1 (24 gennaio 2019)
SECONDA PROVA IN ITINERE

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

1) Data l'equazione non lineare $f(x) \equiv x^3 - 5x + 4 = 0$, avente 3 radici reali $\alpha < 0$, $\beta = 1$, $\gamma > 1$, dimostrare che il metodo di Newton converge ad α per ogni $x_0 \in [-3, -2]$. Successivamente si studi la convergenza e l'ordine del metodo iterativo
$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 4}{5}, \; k \geq 0, \; x_0 \in \mathbb{R},$$
per l'approssimazione di $\alpha, \; \beta, \; \gamma$.

2) Date le funzioni
$$g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right), \; h(x) = \frac{1}{2}x\left(3 - \frac{x^2}{a}\right), \; a > 0:$$

2.1) trovare i punti fissi comuni a g e h.

2.2) Verificare che i metodi iterativi $x_{k+1} = g(x_k)$ e $x_{k+1} = h(x_k)$, $k \geq 0$, convergono localmente al punto fisso α di ascissa positiva e stabilire l'ordine di convergenza.

2.3) Determinare se esistono valori $\lambda, \; \mu \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione
$$\Phi(x) = \lambda g(x) + \mu h(x)$$
abbia punto fisso α e il metodo iterativo associato $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ converga localmente ad α almeno con ordine 3.

3) Rappresentare graficamente la quantità $K_\infty(A)$ al variare di $a > 0$, con
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix},$$
e trovare a tale che $K_\infty(A)$ sia minimo. Calcolare la fattorizzazione $A = LU$.

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,
$$A = \begin{pmatrix} 2a & a & 0 & 1 \\ a & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & a \\ 1 & 0 & a & 2a \end{pmatrix}, \; \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{4,1},$$
con $a \in \mathbb{R}$ tale che la matrice A sia non singolare, trovare una condizione necessaria e sufficiente su a per la convergenza del metodo iterativo:
$$M\mathbf{x}^{(n+1)} = N\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{b}, \quad n \geq 0, \quad \mathbf{x}^{(0)}\text{dato}, \; M = \begin{pmatrix} 2a & a & 0 & 0 \\ a & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & a \\ 0 & 0 & a & 2a \end{pmatrix}, \; N = M - A.$$

5) Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(n \geq 2)$ è una matrice con elementi $a_{ii} = n, \; i = 1, ..., n$ e $a_{ij} = 1, \; i \neq j$, e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Stabilire, senza calcolare il raggio spettrale della matrice di iterazione associata, se il metodo iterativo
$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \omega(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}), \; \omega = \frac{1}{\|A\|_\infty}, \; k \geq 0, \; \mathbf{x}^{(0)}\text{dato},$$
converge a $\mathbf{x}$.