1) Si consideri la famiglia di funzioni, $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g_a(x) = \begin{cases} \sqrt{x+a} & x > 0 \\ \sqrt{a}\, e^x & x \leq 0 \end{cases} \qquad a \geq 1$$

Mate 30-01-2020

1.1) trovare eventuali punti fissi di g_a al variare del parametro reale a;

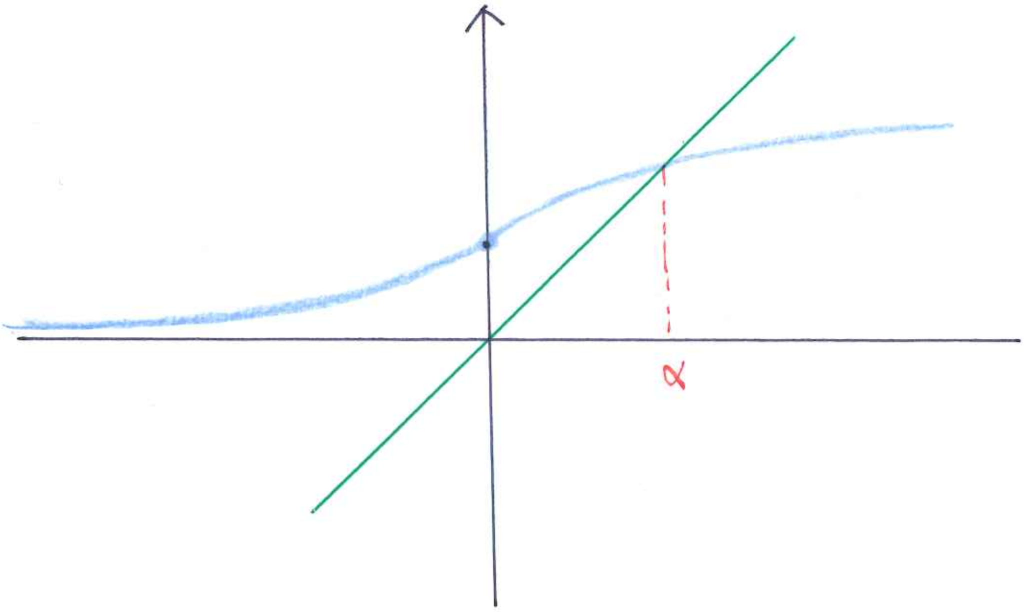
1.2) studiare la convergenza del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$;

1.3) determinare l'ordine di convergenza del metodo iterativo del punto precedente.

$$g_a(x) = \begin{cases} \sqrt{x+a} & x>0 \\ \sqrt{a}\, e^x & x \leq 0 \end{cases} \qquad a \geqslant 1$$

$\sqrt{x+a} = x \qquad x+a = x^2 \qquad x^2 - x - a = 0 \qquad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4a^2}}{2} \quad (x>0)$

$\sqrt{a}\, e^x = x \quad x \leq 0$ Impossibile $\qquad \alpha = \dfrac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$



$g(0) = \sqrt{a}$

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x+a}}, & x>0 \\ \sqrt{a}\, e^x, & x \leq 0 \end{cases}$$

$g'(0^+) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

$g'(0^-) = \sqrt{a}$

$g \notin C^1$

$x_0 < \alpha$: successione monotona crescente limitata sup. da α: $\quad x_n \nearrow \alpha \quad (\sqrt{x_n+a} > x_n \ \forall n)$

$x_0 > \alpha$: successione monotona decrescente limitata inf da α: $\quad x_n \searrow \alpha \quad (\sqrt{x_n+a} < x_n \ \forall n)$

$x \in I(\alpha)$:

$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+a}} < \dfrac{1}{2\sqrt{a}} < \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ (condiz. sufficiente)

$g'(\alpha) \neq 0 \qquad 1^\circ$ ordine

2) Sia f una funzione continua nell'intervallo $[-\beta,\beta]$, con $\beta>0$, costruire la formula di quadratura

$$\int_{-\beta}^{\beta} f(x)\,dx \approx \alpha_1 f\left(-\frac{\beta}{2}\right)+\alpha_2 f\left(\frac{\beta}{2}\right).$$

Determinare il grado di precisione della formula ottenuta e confrontarlo con quello della formula di tipo Gaussiano a due nodi per il medesimo intervallo $[-\beta,\beta]$.

Mate 30-01-2020

$$\int_{-\beta}^{\beta} f(x)\,dx \approx \alpha_1 f\left(-\frac{\beta}{2}\right)+\alpha_2 f\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$r=0$ $\quad f(x)=1$ $\quad \int_{-\beta}^{\beta} 1\,dx = 2\beta$ $\quad$ F.Q. $\alpha_1+\alpha_2=2\beta$

$r=1$ $\quad f(x)=x^2$ $\quad \int_{-\beta}^{\beta} x\,dx = 0$ $\quad$ F.Q. $\alpha_1\left(-\frac{\beta}{2}\right)+\alpha_2\left(\frac{\beta}{2}\right)=0$

$\alpha_1=\alpha_2$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=2\beta\\ \alpha_1=\alpha_2\end{cases} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\beta$$

F.Q. $\quad \beta f\left(-\frac{\beta}{2}\right)+\beta f\left(\frac{\beta}{2}\right)$

G.P. 2?

$f(x)=x^2$ $\quad \int_{-\beta}^{\beta} x^2\,dx = \frac{2}{3}\beta^3$ $\quad$ FQ. $\beta\cdot\frac{\beta^2}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2}\beta^3 \neq \frac{2}{3}\beta^3$

G.P. 1

F.Q Gauss $\quad \alpha_1=\alpha_2=\beta \quad x_0=-x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\beta$

$$\int_{-\beta}^{\beta} f(x)\,dx \approx \beta f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\beta\right)+\beta f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\beta\right)$$

G.P. $2\cdot 2-1=3$

3) Data la matrice,

$$A = \begin{bmatrix} b & a & -a \\ b & b & b \\ a & a & b \end{bmatrix}, \quad a,\ b > 0,\ a \neq b,\ b > \frac{a}{2}$$

3.1) Studiare, in funzione dei parametri a e b, la convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel per il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$.

3.2) Per i valori di a e b per cui entrambi i metodi convergono confrontare le velocità di convergenza.

Mate 30-01-2020

3.1)

$$\det \begin{bmatrix} b\lambda & a & -a \\ b & b\lambda & b \\ a & a & b\lambda \end{bmatrix} =$$

$$b\lambda(b^2\lambda^2 - ab) - b(ab\lambda + a^2) + a(ab + ab\lambda) =$$

$$b^3\lambda^3 - ab^2\lambda - ab^2\lambda - \cancel{a^2b} + \cancel{a^2b} + a^2b\lambda = b^3\lambda^3 - 2ab^2\lambda + a^2b\lambda =$$

$$b\lambda\left[b^2\lambda^2 - 2ab + a^2\right] = 0 \qquad \lambda = 0 \vee \lambda^2 = \frac{2ab - a^2}{b^2}$$ con $2b > a$, $a, b > 0$

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{a(2b-a)}}{b} \qquad \rho(B_J) = \frac{\sqrt{a(2b-a)}}{b} < 1$$

$$a(2b-a) < b^2 \qquad -a^2 + 2ab - b^2 < 0 \qquad (a-b)^2 > 0$$

sì, essendo $a \neq b$

M.J. converge per i valori di a e b dati

3.2)

$$\det \begin{bmatrix} b\lambda & a & -a \\ b\lambda & b\lambda & b \\ a\lambda & a\lambda & b\lambda \end{bmatrix} =$$

$$b\lambda(b^2\lambda^2 - ab\lambda) - b\lambda(ab\lambda + a^2\lambda) + a\lambda(ab + ab\lambda) =$$

$$b^3\lambda^3 - ab^2\lambda^2 - ab^2\lambda^2 - \cancel{a^2b\lambda^2} + a^2b\lambda + \cancel{a^2b\lambda^2} =$$

$$b^3\lambda^3 - 2ab^2\lambda^2 + a^2b\lambda = b\lambda(b^2\lambda^2 - 2ab\lambda + a^2) =$$

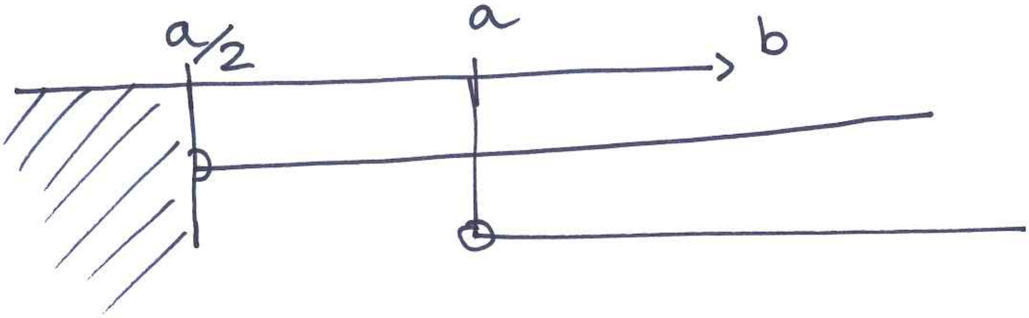
$$b\lambda(b\lambda - a)^2 = 0 \qquad \lambda = 0 \vee \lambda = \frac{a}{b}$$

$\rho(B_{GS}) = \frac{a}{b}$ essendo $a, b > 0$

M.G.S. converge $\iff \frac{a}{b} < 1 \quad b > a$

Jacobi

G.S.



Condizione di convergenza simultanea: $b > a$

$\rho(B_J) = \frac{\sqrt{a(2b-a)}}{b} \qquad \rho(B_{GS}) = \frac{a}{b}$

$\sqrt{a(2b-a)} \geq a$

$2ab - a^2 \geq a^2 \qquad 2ab - a^2 \geq 0 \qquad a(2b-a) \geq 0$

La velocità di convergenza del MJ è minore
della " " " " MGS

4) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0,$$

per i valori di α per i quali A è non singolare:

4.1) calcolare A^{-1}, $K_\infty(A)$, $K_1(A)$;

4.2) calcolare i valori di α per cui $K_\infty(A)$ e, rispettivamente, $K_1(A)$ sono minimi.

Mate
30-01-2020

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha \neq 0$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max\{2, |\alpha|\} = \begin{cases} 2 & |\alpha| < 2 \\ |\alpha| & |\alpha| \geq 2 \end{cases}$$

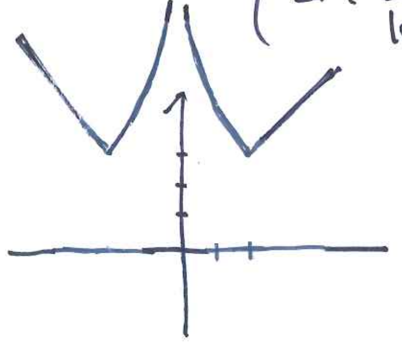
$$\|A^{-1}\|_1 = \max\left\{1 + \frac{1}{|\alpha|}; \frac{1}{|\alpha|}\right\} = 1 + \frac{1}{|\alpha|}$$

$$K_1(A) = \begin{cases} 2 + \frac{2}{|\alpha|} & se \quad |\alpha| < 2 \\ 1 + |\alpha| & se \quad |\alpha| \geq 2 \end{cases}$$

$$\|A\|_\infty = \max\{1, 1 + |\alpha|\} = 1 + |\alpha|$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max\left\{1, \frac{2}{|\alpha|}\right\} = \begin{cases} 1 & |\alpha| \geq 2 \\ \frac{2}{|\alpha|} & |\alpha| < 2 \end{cases}$$

$$K_\infty(A) = \begin{cases} 1 + |\alpha| & |\alpha| \geq 2 \\ 2 + \frac{2}{|\alpha|} & |\alpha| < 2 \end{cases} \qquad K_\infty(A) = K_1(A)$$



$$\min_{\alpha \neq 0} K_\infty(A) = \min_{\alpha \neq 0} K_1(A) = 3, \text{ per } \alpha = \pm 2$$

5) Siano dati $N \geq 3$ punti distinti $\{x_i\} \subset [a, b]$, $i = 1, ..., N$, $x_i \neq x_j$ $i \neq j$; VERO (fornire una dimostrazione) o FALSO (fornire un controesempio) che

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^2 L_i(x) = x^2, \quad x \in [a, b]$$

dove $L_i(x)$ è l'$i-$esimo polinomio elementare di Lagrange.

Mate 30-01-2020

Suggerimento:

Scegliere $f(x) = x^2$ e applicare il metodo di interpolazione di Lagrange +

$\exists!$ polinomio interpolazione