CALCOLO NUMERICO (30 gennaio 2020)

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

1) Si consideri la famiglia di funzioni, $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g_a(x) = \begin{cases} \sqrt{x+a} & x > 0 \\ \sqrt{a}\, e^x & x \leq 0 \end{cases} \quad a \geq 1$$

1.1) trovare eventuali punti fissi di g_a al variare del parametro reale a;

1.2) studiare la convergenza del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$;

1.3) determinare l'ordine di convergenza del metodo iterativo del punto precedente.

2) Sia f una funzione continua nell'intervallo $[-\beta, \beta]$, con $\beta > 0$, costruire la formula di quadratura

$$\int_{-\beta}^{\beta} f(x)\, \mathrm{d}x \approx \alpha_1 f\left(-\frac{\beta}{2}\right) + \alpha_2 f\left(\frac{\beta}{2}\right).$$

Determinare il grado di precisione della formula ottenuta e confrontarlo con quello della formula di tipo Gaussiano a due nodi per il medesimo intervallo $[-\beta, \beta]$.

3) Data la matrice,

$$A = \begin{bmatrix} b & a & -a \\ b & b & b \\ a & a & b \end{bmatrix}, \; a,\; b > 0,\; a \neq b,\; b > \frac{a}{2}$$

3.1) Studiare, in funzione dei parametri a e b, la convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel per il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$.

3.2) Per i valori di a e b per cui entrambi i metodi convergono confrontare le velocità di convergenza.

4) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}, \; \alpha \neq 0,$$

per i valori di α per i quali A è non singolare:

4.1) calcolare A^{-1}, $K_\infty(A)$, $K_1(A)$;

4.2) calcolare i valori di α per cui $K_\infty(A)$ e, rispettivamente, $K_1(A)$ sono minimi.

5) Siano dati $N \geq 3$ punti distinti $\{x_i\} \subset [a, b]$, $i = 1, ..., N$, $x_i \neq x_j$ $i \neq j$; VERO (fornire una dimostrazione) o FALSO (fornire un controesempio) che

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^2 L_i(x) = x^2, \quad x \in [a, b]$$

dove $L_i(x)$ è l'$i-$esimo polinomio elementare di Lagrange.