Cognome: ______________ Nome: ______________ Matricola: __________

CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 30 gennaio 2020

1) Sia $f(x) = \log(5 + x)$ definita nell'intervallo $I = [a, b], a = -2, b = 2$.

Si considerino su tale intervallo $(n + 1)$ nodi di interpolazione ottenuti come immagine sull'intervallo I dei nodi di Gauss-Chebyshev (C) o dei nodi di Gauss-Lobatto (L), questi ultimi definiti sull'intervallo di riferimento $[-1, 1]$ come

$$\widehat{x}_k = -\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, \dots, n.$$

Siano, rispettivamente, $p_{n,C}$ e $p_{n,L}$ i polinomi interpolatori ottenuti utilizzando i nodi (C) oppure (L).

Dati i punti $z_i = a + ih, i = 0, \dots, 1000,\ h = (b - a)/1000$, si calcolino per $n = 4, 6, 8$ gli errori

$$e_{n,C} = \max_{z_i, i=0,\dots,1000} |f(z_i) - p_{n,C}(z_i)|, \quad e_{n,L} = \max_{z_i, i=0,\dots,1000} |f(z_i) - p_{n,L}(z_i)|,$$

commessi utilizzando, rispettivamente, i nodi di tipo (C) e i nodi di tipo (L).

RISULTATI

n	4	6	8
$e_{n,C}$			
$e_{n,L}$			

2) Data la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \cos(s)\mathrm{d}s = \sin(x),$$

si vuole approssimare il valore di $F(x_k)$ per ogni $x_k = kH$, $k = 1, ..., 100$, $H = \frac{\pi}{100}$.

Siano $f_{P,k}$ e $f_{T,k}$ i valori approssimati di $F(x_k)$ ottenuti, rispettivamente, con il metodo del punto medio composito (P) e dei trapezi compositi (T) utilizzando k intervalli di uguale ampiezza H, $k = 1, ..., 100$.

Calcolare gli errori commessi

$$E_P = \sqrt{\sum_{k=1}^{100} [F(x_k) - f_{P,k}]^2}, \quad E_T = \sqrt{\sum_{k=1}^{100} [F(x_k) - f_{T,k}]^2}.$$

RISULTATI

$E_P =$

$E_T =$

3) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con A matrice quadrata simmetrica di dimensione $n+1$, data da:

$$A = \begin{pmatrix}
n^2 & \frac{n}{1} & \frac{n}{2} & \frac{n}{3} & \frac{n}{4} & \frac{n}{5} & \frac{n}{6} & \dots & \frac{n}{n-1} & \frac{n}{n} \\
\frac{n}{1} & n^2 & \frac{n}{1} & \frac{n}{2} & \frac{n}{3} & \frac{n}{4} & \frac{n}{5} & \frac{n}{6} & \dots & \frac{n}{n-1} \\
\frac{n}{2} & \frac{n}{1} & n^2 & \frac{n}{1} & \frac{n}{2} & \frac{n}{3} & \frac{n}{4} & \frac{n}{5} & \frac{n}{6} & \dots \\
\frac{n}{3} & \frac{n}{2} & \frac{n}{1} & n^2 & \frac{n}{1} & \frac{n}{2} & \frac{n}{3} & \frac{n}{4} & \frac{n}{5} & \frac{n}{6} \\
\frac{n}{4} & \frac{n}{3} & \frac{n}{2} & \frac{n}{1} & n^2 & \frac{n}{1} & \frac{n}{2} & \frac{n}{3} & \frac{n}{4} & \frac{n}{5} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \frac{n}{6} & \frac{n}{5} & \frac{n}{4} & \frac{n}{3} & \frac{n}{2} & \frac{n}{1} & n^2 & \frac{n}{1} & \frac{n}{2} \\
\frac{n}{n-1} & \dots & \frac{n}{6} & \frac{n}{5} & \frac{n}{4} & \frac{n}{3} & \frac{n}{2} & \frac{n}{1} & n^2 & \frac{n}{1} \\
\frac{n}{n} & \frac{n}{n-1} & \dots & \frac{n}{6} & \frac{n}{5} & \frac{n}{4} & \frac{n}{3} & \frac{n}{2} & \frac{n}{1} & n^2
\end{pmatrix},$$

e $f_i = 1,\ i = 1, ..., n+1, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1,1}$.

Calcolare $K_2(A)$ e $\|A\|_2$.

Approssimare la soluzione $\mathbf{x}$ con il metodo iterativo di Gauss-Seidel utilizzando $x_i{}^{(0)} = 0,\ i = 1, ..., n+1$ e test d'arresto $\|A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{f}\|_2 < 10^{-8}$. Sia `it` il numero di iterazioni eseguite.

Si vuole confrontare l'errore assoluto $E_{\mathtt{it}}$ calcolato all'iterata `it`-esima, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(\mathtt{it})}\|_2$, dove $\mathbf{x}$ è la soluzione esatta calcolata con il comando Matlab `x = A\f`, con la maggiorazione $M_{\mathtt{it}}$, nota dalla teoria,

$$\underbrace{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(\mathtt{it})}\|_2}_{E_{\mathtt{it}}} \le \underbrace{\frac{K_2(A)}{\|A\|_2} \|\mathbf{f} - A\mathbf{x}^{(\mathtt{it})}\|_2}_{M_{\mathtt{it}}}.$$

Calcolare $E_{\mathtt{it}}$ e $M_{\mathtt{it}}$ nel caso di $n = 20$.

RISULTATI

$K_2(A) =$ $\qquad$ $\|A\|_2 =$ $\qquad$ $\mathtt{it} =$

$E_{\mathtt{it}} =$ $\qquad$ $M_{\mathtt{it}}$