CALCOLO NUMERICO 1 (21 gennaio 2020)
SECONDA PROVA IN ITINERE

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

1) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1/a \\ 1/a & 0 & a & 0 \\ 0 & 1/a & 0 & a \end{pmatrix}, \; a \neq 0, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{4,1},$$

trovare una condizione necessaria e sufficiente su a per la convergenza dei metodi iterativi di Jacobi e di Gauss Seidel e confrontare le rispettive velocità di convergenza.

Discutere la convergenza del metodo iterativo

$$M\mathbf{x}^{(n+1)} = N\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{b}, \quad n \geq 0, \quad \mathbf{x}^{(0)} \text{ dato, } M = \begin{pmatrix} a/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a/2 \end{pmatrix}.$$

2) Assegnati i punti $(0,-1)$, $(1,0)$, $(3,-1)$:

2.1) costruire la spline lineare interpolante;

2.2) costruire la generica spline quadratica interpolante;

2.3) determinare se esiste una spline quadratica interpolante $s_2(x)$ tale che $s_2'(0) = 1$.

3) Dati $x_0 = -\pi$, $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$:

3.1) costruire il polinomio $p(x)$ interpolante $f(x) = x^2 + sin(x)$ nei nodi $x_i,\ i = 0,1,2$;

3.2) costruire polinomio $q(x)$ interpolante $g(x) = x^3 + sin(x)$ nei nodi $x_i,\ i = 0,1,2$;

3.3) trovare una maggiorazione degli errori

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - p(x)|, \quad \max_{x\in[-\pi,\pi]} |g(x) - q(x)|.$$

4) Data la formula di quadratura con peso $|x|$:

$$\int_{-1}^{1} |x|\, f(x)dx \approx \alpha f(x_0) + \beta f(x_1), \quad x_0 \neq x_1,\ x_0,\ x_1 \neq 0$$

trovare i pesi α, β e i nodi $x_0,\ x_1$, in modo che abbia grado di precisione massimo.

Determinare il grado di precisione della formula ottenuta.

5) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, una funzione continua, trovare $c \in \mathbb{R}$ in modo tale che sia minima la quantità

$$\sqrt{\int_a^b (f(x) - c)^2\, dx}$$