**CALCOLO NUMERICO** (7 giugno 2005) - Seconda prova in itinere

1) Dimostrare che il metodo di Newton per la ricerca di una radice semplice di un'equazione non lineare è del secondo ordine, e fornire una condizione sulla scelta di $x_0$.

2) Data la matrice $A$ di dimensione $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} 3+\frac{1}{n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2+\frac{1}{n} & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 2+\frac{1}{n} & -1 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 3-\frac{1}{n} \end{bmatrix},$$

fornire una maggiorazione per $K_2(A)$ al variare di $n$.

3) Considerare l'equazione non lineare $x - 1.5\sin(x) = 0$. Dimostrare graficamente che l'equazione ha tre radici: $\alpha = 0$, $\beta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, $\gamma \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3})$. Dimostrare che il procedimento iterativo $x_{n+1} = 1.5\sin(x_n)$, $n = 0, 1, ...,$ converge alla radice $\beta$ per ogni scelta di $x_0 \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$.

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 1 \\ a^2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad a, b > 0,$$

determinare per quali valori di $a$ e $b$:

4.1) $A$ è simmetrica e definita positiva.

4.2) Il metodo di Gauss-Seidel converge.

Se $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, stimare il numero di iterazioni necessarie del metodo di Gauss-Seidel affinchè si abbia

$$\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq 10^{-6}.$$

5) (Solo per il corso avanzato) Dato l'integrale

$$I = \int_{-1}^{1} (1 + x^2) f(x) \mathrm{d}x,$$

e la formula di quadratura Gaussiana

$$Q(f) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

determinare pesi e nodi in modo che il grado di precisione della formula sia massimo. Utilizzare tale formula per approssimare

$$I = \int_{-1}^{1} |x| \mathrm{d}x.$$