CALCOLO NUMERICO (14 giugno 2005)

1) Studiare convergenza e ordine del metodo iterativo

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n},$$

per la soluzione dell'equazione $f(x) \equiv x^2 - 2 = 0$. Proporre e giustificare la scelta di un opportuno test d'arresto.

2) Discutere la convergenza del metodo di Gauss-Seidel per la risoluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ con:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3) Analisi dell'errore e condizionamento nella risoluzione dei sistemi lineari.

4) Sia f una funzione continua sull'intervallo $[-h, h]$ e sia π_1 il polinomio interpolatore lineare di f nei nodi $\{x_0 = -h/2,\ x_1 = h/2\}$. Costruire la formula di quadratura

$$\int_{-h}^{h} f(x)\ \mathrm{d}x \approx \alpha_1 f\left(-\frac{h}{2}\right) + \alpha_2 f\left(\frac{h}{2}\right)$$

utilizzando π_1.

5) Si consideri l'integrale

$$I(f) = \int_0^1 e^{\frac{1}{2}x}\ \mathrm{d}x,$$

e si valuti il numero minimo di intervalli necessario per calcolare $I(f)$ con un errore assoluto $\leq 10^{-3}$, utilizzando la formula dei trapezi composita.

6) (Solo per il corso avanzato) Trovare la retta dei minimi quadrati continui relativa alla base dei monomi $\{1,\ x\}$ per la funzione $f(x) = x^2 + 3x + 2$ in $[0, 1]$.