

CALCOLO NUMERICO (12 giugno 2006)

Seconda prova in itinere

1) Sia

$$I = \int_1^3 \frac{2}{x^2} dx .$$

- Calcolare il valore \tilde{I} ottenuto approssimando l'integrale I con il metodo dei trapezi composito a 4 sottointervalli uniformi.
- Calcolare l'errore

$$E = |I - \tilde{I}| .$$

- Dare una stima dell'errore E .

2) Indicare per quali valori di $x_1 \in \mathbb{R}$ esiste uno ed unico polinomio di terzo grado $p_3(x)$ tale che

$$p_3(0) = y_0 , \quad p_3(x_1) = y_1 , \quad p_3''(x_1) = y_2 , \quad \int_0^1 p_3(x) dx = y_3$$

per ogni insieme di dati y_0, y_1, y_2, y_3 .

3) Dimostrare la stima dell'errore che si commette interpolando una funzione $f \in C^2([a, b])$ con una spline lineare in $n + 1$ nodi distinti

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b .$$

Determinare il numero minimo di sottointervalli di uguale ampiezza in cui si deve suddividere l'intervallo $[0, 2]$ affinché l'errore che si commette interpolando la funzione $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ con una spline lineare sia minore di 10^{-3} .

4) (*Solo per gli studenti del corso avanzato*)

Calcolare la matrice di iterazione B_ω del metodo SOR applicato al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

e verificare che $\det(B_\omega) = (1 - \omega)^2$.