

CALCOLO NUMERICO (19 giugno 2006)

1) Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

1.1) Calcolare $\|A\|_\infty$ e stabilire per quali valori di α tale quantità risulta minima.

1.2) Determinare per quali valori di α si ha $\|B_J\|_\infty < 1$, dove B_J è la matrice di iterazione del metodo di Jacobi.

1.3) Determinare per quali valori di α la matrice A è non singolare.

2) Data la funzione $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$:

2.1) Determinare il polinomio $p_2(x)$ che interpola $f(x)$ nei nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ utilizzando il metodo di Lagrange.

2.2) Fornire una maggiorazione dell'errore $|f(x) - p_2(x)|$ per $x \in [-1, 1]$.

2.3) Calcolare la quantità

$$\sum_{i=0}^2 L_i(x)$$

3) Data la funzione $f(x) \equiv x^3 - ax$, $a > 0$:

3.1) Stabilire, al variare di a , il numero delle radici reali di f .

3.2) Dato il metodo iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{m}, \quad m \in \mathbb{R}$$

determinare il parametro m in modo che il metodo risulti del secondo ordine per l'approssimazione della radice positiva di f .

3.3) Si studi graficamente la convergenza del metodo iterativo

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3}{a}$$

4) (*Solo per gli studenti del corso avanzato*)

Approssimare il valore dell'integrale definito

$$\int_0^2 \log(x+2) dx$$

mediante la formula di Gauss-Legendre a due punti e calcolare l'errore commesso.