CALCOLO NUMERICO (9 giugno 2008)
Seconda prova in itinere

1) Data la funzione $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $x \in [0,3]$, costruire il polinomio di grado 3, $p_3(x)$, che interpola f nei nodi $x_i = i$, $i = 0,1,2,3$.

   Calcolare l'errore di interpolazione nel punto $x = \frac{3}{2}$:
$$\left| f\left(\frac{3}{2}\right) - p_3\left(\frac{3}{2}\right) \right| ,$$
   e fornire una maggiorazione dell'errore
$$\max_{x\in[0,3]} |f(x) - p_3(x)| .$$

2) Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f \in C^1[0,1]$, si costruisca l'unico polinomio di grado 2, $p_2(x)$, che soddisfa le condizioni:
$$p_2(0) = f(0) , \quad p_2'(0) = f'(0) , \quad p_2(1) = f(1) .$$
   Si calcolino poi i coefficienti $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ della formula di quadratura
$$\widetilde{I}(f) = a_0 f(0) + a_1 f(1) + a_2 f'(0) \;\approx\; I(f) = \int_0^1 f(x)dx ,$$
   ottenuta mediante il calcolo esatto del seguente integrale definito:
$$\widetilde{I}(f) = \int_0^1 p_2(x)dx .$$

3) Data la matrice A di dimensione $n \times n$, con $n \geq 3$:
$$A = \begin{pmatrix} n^2+1 & -1 & 0 & ... & 1 \\ -1 & n+1 & -1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & -1 & n+1 & -1 \\ 1 & ... & ... & -1 & n^2-1 \end{pmatrix},$$
   fornire una maggiorazione per $K_2(A)$ al variare di n.

   Nel caso particolare $n = 3$, posto $\mathbf{z}^{(0)} = (0,5,0)^T$, applicare un passo del metodo delle potenze per fornire un'approssimazione σ_0 dell'autovalore di modulo massimo.

4) (*Solo per gli studenti del corso avanzato*)

   Descrivere il metodo iterativo SOR, ricavare la matrice di iterazione associata e dimostrare che $0 < \omega < 2$ è una condizione necessaria per la convergenza del metodo.