CALCOLO NUMERICO (16 giugno 2008)

1) Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{2}} + x,$$

1.1) stimare il numero minimo di intervalli necessari per approssimare $f(x)$ sull'intervallo $[0, 2]$ con un errore assoluto $< 10^{-4}$, utilizzando il metodo di interpolazione composita mediante spline lineari;

1.2) approssimare il valore dell'integrale definito

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$$

mediante il metodo dei trapezi compositi utilizzando 4 sottointervalli di uguale ampiezza e stimare l'errore commesso utilizzando la stima asintotica dell'errore.

2) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ e

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 4 & 1/2 \\ 0 & 2\alpha & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0 :$$

2.1) trovare un CNS su α affinchè il metodo di Jacobi sia convergente;

2.2) trovare un CNS su α affinchè il metodo di Gauss-Seidel sia convergente;

2.3) costruire la matrice di iterazione B_J del metodo di Jacobi e calcolare $||B_J||_1$ in funzione del parametro α;

2.4) nel caso particolare $\alpha = 8$, stimare il numero minimo di iterazioni sia del metodo di Jacobi che del metodo di Gauss-Seidel affinchè l'errore relativo soddisfi

$$\frac{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_k||_2}{||\mathbf{x}||_2} < 10^{-8} ,$$

dove $\mathbf{x}$ è la soluzione esatta del sistema e $\mathbf{x}_k$ l'iterata k-esima o del metodo di Jacobi o del metodo di Gauss-Seidel.

3) Sia data la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita a tratti

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2^x + x^2 - 1) & x \geq 0 \\ x^2 + 2x & x < 0 . \end{cases}$$

e il metodo di punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si studi graficamente la convergenza del metodo al variare del punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$, indicando, eventualmente, anche l'ordine di convergenza.

4) (*Solo per gli studenti del corso avanzato*). Descrivere il metodo per la costruzione delle formule di quadratura di tipo Gauss-Legendre, giustificando i vari passaggi del procedimento.