CALCOLO NUMERICO (15 giugno 2009) - **Seconda prova in itinere**

1) (*Per gli studenti che non hanno ottenuto l'esonero nella* 1^a *prova in itinere*)

Costruire una function MATLAB che, dati una funzione f, due numeri reali a e b, con $a < b$, ed un intero positivo n, esegua le seguenti istruzioni:

1.1) Interpoli la funzione f con un polinomio p_C di grado $n-1$, usando come nodi gli zeri del polinomio di Chebyshev di grado n sull'intervallo $[a, b]$.

1.2) Calcoli $err_C = \max_{i=1,2,\dots,1001} |f(z_i) - p_C(z_i)|$, dove gli z_i sono 1001 nodi equispaziati dell'intervallo $[a, b]$.

(Si utilizzino i comandi `polyfit` e `polyval`).

2) Data la matrice A_k di dimensione 5×5:

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 \\ k & k^2+1 & k & 0 & 0 \\ 0 & k & k^2+1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k & k^2+1 & k \\ 0 & 0 & 0 & k & 1 \end{bmatrix}, \quad 0 < k < 1,$$

fornire una maggiorazione per $K_2(A_k)$ al variare di k e discutere il comportamento di $K_2(A_k)$ per $k \to 0^+$ e $k \to 1^-$.

3) Sono assegnati i punti $x_0 = -\alpha$, $x_1 = 0$, $x_2 = \alpha$ e i valori $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2$, dove $\alpha > 0$ e f è una funzione data. Costruire la retta p_1 che passa per i 2 punti (x_0, y_0) e (x_2, y_2) e dimostrare che è parallela alla retta che approssima f nel senso dei minimi quadrati, rispetto ai 3 punti (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2$. Successivamente, nel caso particolare di $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$ e $\alpha = 2$, si costruisca il polinomio p_2 che interpola f nei 3 nodi x_0, x_1 e x_2 e si dia una maggiorazione dell'errore $|f(x) - p_2(x)|$, per $x \in [-2, 2]$.

4) Sia data la formula di quadratura $\widetilde{I}(f) = Af(0) + Bf(2) + Cf(3)$, per approssimare l'integrale $I(f) = \int_0^3 f(x)\, \mathrm{d}x$.

4.1) Calcolare $A, B, C \in \mathbb{R}$ affinchè $\widetilde{I}$ abbia almeno grado di precisione 2.

4.2) Applicare la formula di quadratura ottenuta al punto 4.1) per approssimare l'integrale definito $I(x^3) = \int_0^3 x^3\, \mathrm{d}x$.

Calcolare l'errore $E = |I(x^3) - \widetilde{I}(x^3)|$.

4.3) Utilizzando la stima classica dell'errore, stimare quanti sottointervalli sono necessari affinchè l'errore $|I(x^3) - \widetilde{I}_T^C(x^3)|$ sia inferiore al valore E ottenuto al punto 4.2), dove $\widetilde{I}_T^C$ è la formula di quadratura dei trapezi compositi.

5) (*Solo per gli studenti del corso avanzato*)

Descrivere il metodo iterativo SOR e dimostrare che $0 < \omega < 2$ è una condizione necessaria per la convergenza del metodo.