

CALCOLO NUMERICO (22 giugno 2009)

- 1) Costruire una function MATLAB che, dati f funzione inline, un valore iniziale x_0 , una tolleranza tol ed un numero massimo di iterazioni nmax , implementi il metodo di Newton per la ricerca della radice α e restituisca l'errore commesso $|x_n - \alpha|$, controllando che, $\forall n$, sia soddisfatta la condizione $|f'(x_n)| \geq (10 * \text{tol})$.
- 2) Utilizzando la stima classica trovare quanti sottointervalli sono necessari affinché l'errore commesso approssimando l'integrale definito $\int_0^\pi \cos^2 x \, dx$ con la formula di quadratura dei trapezi composti sia minore di 10^{-2} .
- 3) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con A matrice 4×4 di elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{se } i = j, \\ 1 & \text{se } i = 1 \wedge j = 4 \text{ oppure } j = 1 \wedge i = 4, \\ -1 & \text{se } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \alpha \neq 0 :$$

- 3.1) localizzare gli autovalori di A e fornire una maggiorazione per $K_2(A)$ nel caso di $\alpha > 2$;
- 3.2) costruire la matrice di iterazione B_J del metodo di Jacobi e determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\|B_J\|_\infty < 1$;
- 3.3) si consideri la decomposizione di $A = N - P$, con N matrice diagonale di elementi $N_{ii} = \frac{\alpha}{2}$, e il metodo iterativo $\mathbf{x}_{k+1} = B\mathbf{x}_k + N^{-1}\mathbf{b}$, $B = N^{-1}P$; ricavare le matrici N , P e B , e verificare che, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha $\|B\|_1 > 1$.
- 4) Data la funzione definita a tratti

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x < 1 \\ -\frac{2}{x} + \frac{x}{2} + 2 & x \geq 1 \end{cases} :$$

- 4.1) si trovino esplicitamente tutti i punti fissi della funzione g ;
- 4.2) si studi la convergenza del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ al variare del punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$;
- 4.3) si indichi l'ordine di convergenza.
- 5) Data la funzione $f(x) = 2^x$, si costruisca il polinomio di secondo grado p_2 che la interpola nei punti di ascissa 0, 1, 2 e si fornisca una maggiorazione dell'errore $|f(x) - p_2(x)|$, per $x \in [0, 2]$.
- 6) (*Solo per gli studenti del corso avanzato*).
Descrivere i metodi del gradiente per l'approssimazione numerica di sistemi lineari.