

CALCOLO NUMERICO (24 giugno 2011)

- 1) Sia dato il problema di calcolare la radice α del polinomio

$$p(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

nell'intervallo $[1,2]$. Si dimostri che il metodo di Newton converge per ogni scelta del valore iniziale $x_0 \in [1,2]$ e si calcoli x_2 scegliendo $x_0 = 1$. Si fornisca una stima dell'errore $|\alpha - x_2|$.

- 2) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{g}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} \in \mathbb{R}^4,$$

dimostrare che il metodo iterativo

$$(*) \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad k \geq 0,$$

converge alla soluzione del sistema lineare, dove $B = I - A$ è la matrice di iterazione associata al metodo iterativo e $\mathbf{x}^{(0)}$ è un generico vettore di \mathbb{R}^4 . Confrontare la velocità di convergenza del metodo (*) con quella del metodo di Gauss-Seidel.

- 3) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2} + \frac{\sqrt{x-1}}{2}$$

e stabilire per quali $x \in (1, \infty)$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 5$.

- 4) Data la funzione $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $x \in [0,1]$, costruire il polinomio di grado 2, che interpola f nei nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Fornire una maggiorazione dell'errore di interpolazione per $x \in [0,1]$.
- 5) Descrivere il metodo delle potenze.