

## CALCOLO NUMERICO 1 (19 giugno 2012)

- 1) Dato il sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , con  $A$  matrice  $3 \times 3$  di elementi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & 2\alpha & \alpha \\ -\alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0 :$$

- 1.1) per quali valori di  $\alpha$  la matrice  $A$  è non singolare?  
1.2) costruire la matrice di iterazione  $B_J$  associata al metodo di Jacobi e calcolare  $\|B_J\|_1$ ;  
1.3) verificare che per  $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$  si ha  $\rho(B_J) < 1$ .

- 2) Assegnata la funzione  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 12x + 1$ , si applichi il metodo di bisezione nell'intervallo  $[-2, 1]$ : converge verso qualche zero di  $f$ ? In caso affermativo, quante iterazioni sono sufficienti affinché l'errore assoluto diventi minore di  $2^{-10}$ ? Studiare convergenza e l'eventuale ordine di convergenza del metodo di Newton considerando il medesimo intervallo iniziale  $[-2, 1]$ .

- 3) Proporre una formula di quadratura numerica per approssimare l'integrale

$$I = \int_0^2 e^{-x^2} dx$$

con un errore minore o uguale a  $tol = 10^{-3}$ .

- 4) Sono assegnati i tre punti  $(0, 2)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(3, k)$ .  
4.1) Si calcoli la retta di miglior approssimazione nel senso dei minimi quadrati.  
4.2) Per quale valore di  $k$  la retta di approssimazione è anche retta di interpolazione?  
5) Fornire delle condizioni sotto le quali il seguente problema di migliore approssimazione ammette una soluzione unica. Calcolare nel caso tale soluzione. Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione integrabile,  $a < b$ , trovare la costante  $C$  che rende minima la quantità

$$\int_a^b (f(x) - C)^2 dx.$$