

CALCOLO NUMERICO 1 (19 giugno 2012)

- 1) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con A matrice 3×3 di elementi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & 2\alpha & \alpha \\ -\alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0 :$$

- 1.1) per quali valori di α la matrice A è non singolare?
1.2) costruire la matrice di iterazione B_J associata al metodo di Jacobi e calcolare $\|B_J\|_1$;
1.3) verificare che per $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ si ha $\rho(B_J) < 1$.

- 2) Assegnata la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 12x + 1$, si applichi il metodo di bisezione nell'intervallo $[-2, 1]$: converge verso qualche zero di f ? In caso affermativo, quante iterazioni sono sufficienti affinché l'errore assoluto diventi minore di 2^{-10} ? Studiare convergenza e l'eventuale ordine di convergenza del metodo di Newton considerando il medesimo intervallo iniziale $[-2, 1]$.

- 3) Proporre una formula di quadratura numerica per approssimare l'integrale

$$I = \int_0^2 e^{-x^2} dx$$

con un errore minore o uguale a $tol = 10^{-3}$.

- 4) Sono assegnati i tre punti $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(3, k)$.
4.1) Si calcoli la retta di miglior approssimazione nel senso dei minimi quadrati.
4.2) Per quale valore di k la retta di approssimazione è anche retta di interpolazione?
5) Fornire delle condizioni sotto le quali il seguente problema di migliore approssimazione ammette una soluzione unica. Calcolare nel caso tale soluzione. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile, $a < b$, trovare la costante C che rende minima la quantità

$$\int_a^b (f(x) - C)^2 dx.$$