CALCOLO NUMERICO 1 (20 giugno 2013)

1) Dati n punti (x_k, y_k), $k = 1, ..., n$ si determini la costante c in modo tale che $y = c$ sia l'equazione della retta che approssima i dati nel senso dei minimi quadrati discreti di grado zero.

   Nel caso particolare $(x_k, y_k) = (k, 1)$, $k = 1, ..., n-1$ e $(x_n, y_n) = (n, n)$ si calcoli c in funzione di n e si scriva l'espressione della spline lineare $y = S_1(x)$ che interpola i dati.

   Si calcoli infine l'espressione di $r(x) = S_1(x) - c$, $x \in [1, n]$ e

$$\lim_{n\to\infty} \max_{n-1\le x\le n} |r(x)|.$$

2) Dato il metodo iterativo

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad g(x) = a^2x^3 - 3ax^2 + 3x, \quad a > 0,$$

   si determinino le soluzioni dell'equazione $x = g(x)$ e si studi la convergenza del metodo iterativo al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$.

3) Determinare $h > 0$, ω_1 e ω_2 in modo tale che la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, \mathrm{d}x \approx \omega_1 f(-h) + \omega_2 f(0) + \omega_1 f(h),$$

   abbia grado di precisione massimo. Di che formula si tratta? Quanto vale il grado di precisione?

4) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

   e si trovi la sua inversa A^{-1}, imponendo elemento per elemento l'uguaglianza $AA^{-1} = I_4$, sapendo che $\{A^{-1}\}_{11} = \{A^{-1}\}_{44} = 1$ e che gli elementi della prima sottocolonna e dell'ultima sopracolonna sono nulli. Si calcoli quindi il numero di condizionamento in norma infinito della matrice A.
   Si stabilisca infine se il metodi di Jacobi è convergente nel caso di sistema lineare con matrice A.

5) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e siano assegnati i punti $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$, quante funzioni spline $S_2(x)$ quadratiche interpolanti nei nodi indicati esistono? Nel caso in cui si richieda l'ulteriore condizione di regolarità, $S_2 \in C^2([a, b])$, cioè S_2 continua con le sue derivata prima e seconda, esiste una spline quadratica interpolante?